

索取号: O17/4.111

密级: 公 开

南京师范大学

博士学位论文



椭圆型偏微分方程的弱有限元方法研究 Weak Galerkin Finite Element Methods for Partial Differential Equations of Elliptic Type

研究生: 王春梅
指导教师: 陈金如 教授
 王军平 教授
培养单位: 数学科学学院
一级学科: 数学
二级学科: 计算数学
完成时间: 2014年2月26日
答辩时间: 2014年5月13日

学位论文独创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作和取得的研究成果。本论文中除引文外，所有实验、数据和有关材料均是真实的。本论文中除引文和致谢的内容外，不包含其他人或其它机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了声明并表示了谢意。

学位论文作者签名：

日期：

学位论文使用授权声明

研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属南京师范大学。学校有权保留本学位论文的电子和纸质文档，可以借阅或上网公布本学位论文的部分或全部内容，可以采用影印、复印等手段保存、汇编本学位论文。学校可以向国家有关机关或机构送交论文的电子和纸质文档，允许论文被查阅和借阅。（保密论文在解密后遵守此规定）

保密论文注释：本学位论文属于保密论文，密级：_____ 保密期限为_____年。

学位论文作者签名：

指导教师签名：

日期：

日期：

目 录

摘 要.....	vii
Abstract.....	ix
前 言.....	1
第1章 预备知识.....	6
1.1 Sobolev 空间.....	6
1.2 $H(\text{div})$ 和 $H(\text{curl})$ 空间.....	11
1.3 经典有限元方法概述.....	14
1.4 形状正则剖分上有限元空间的性质.....	22
第2章 重调和方程的弱有限元方法.....	33
2.1 重调和方程简介.....	33
2.2 常用数值方法.....	39
2.3 弱 Hessian 和离散弱 Hessian.....	44
2.4 弱有限元方法.....	46
2.5 L^2 投影及其性质.....	49
2.6 误差方程.....	52
2.7 技术引理.....	55
2.8 误差估计.....	61
第3章 重调和方程的弱有限元方法的数值实验.....	77
3.1 基于变分形式的弱有限元方法的数值实验.....	78
3.1.1 程序实现.....	78
3.1.2 数值计算结果.....	85
3.2 基于 Schur 补矩阵形式的弱有限元方法的数值实验.....	87
3.2.1 Schur 补矩阵.....	88
3.2.2 程序实现.....	91
3.2.3 数值计算结果.....	94

第4章 重调和方程的杂交弱有限元方法	101
4.1 杂交弱有限元方法.....	101
4.2 稳定性条件	105
4.3 误差方程.....	109
4.4 误差估计.....	112
4.5 变量消去法的有效实施.....	115
4.5.1 变量消去法的理论	115
4.5.2 变量消去法的计算格式	119
第5章 静态麦克斯韦方程组的弱有限元方法	121
5.1 麦克斯韦方程组简介	121
5.2 常用数值方法.....	127
5.3 弱散度和弱旋度	134
5.4 弱有限元方法.....	136
5.5 误差方程.....	140
5.6 技术引理.....	144
5.7 误差估计.....	148
5.8 Schur 补.....	157
第6章 Div-Curl 问题的弱有限元方法.....	160
6.1 Div-Curl 问题及其分解	160
6.1.1 I 型边值问题的分解.....	161
6.1.2 II 型边值问题的分解	163
6.1.3 研究的中心问题	165
6.2 弱有限元方法.....	166
6.3 稳定性条件	167
6.4 误差方程.....	172
6.5 技术引理.....	175
6.6 误差估计.....	177
第7章 结论与展望	185
参考文献.....	186

目 录

攻读博士学位期间所发表及已完成的论文	192
致 谢.....	194

Contents

Abstract (in Chinese)	vii
Abstract (in English)	ix
Preface	1
Chapter 1 Preliminaries	6
1.1 Sobolev Spaces	6
1.2 $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$ Spaces	11
1.3 Classical Finite Element Methods	14
1.4 Properties of Finite Element Spaces with Shape Regular Partitions	22
Chapter 2 Weak Galerkin Finite Element Methods for Biharmonic Equation	33
2.1 An Introduction to Biharmonic Equation	33
2.2 Existing Numerical Methods	39
2.3 Weak Hessian and Discrete Weak Hessian	44
2.4 Weak Galerkin Finite Element Methods	46
2.5 L^2 Projections and Their Properties	49
2.6 Error Equations	52
2.7 Some Technical Estimates	55
2.8 Error Estimates	61
Chapter 3 Numerical Experiments of Weak Galerkin Finite Element Methods for Biharmonic Equation	77
3.1 Implementation of Weak Galerkin Finite Element Methods Based on the Original Variational Formulation	78
3.1.1 Implementation	78
3.1.2 Numerical Results	85
3.2 Implementation of Weak Galerkin Finite Element Methods Based on Schur Complement in a Matrix Form	87
3.2.1 Schur Complement in a Matrix Form	88

3.2.2 Implementation	91
3.2.3 Numerical Results	94
Chapter 4 Hybridized Weak Galerkin Finite Element Methods for Biharmonic Equation	101
4.1 Hybridized Weak Galerkin Finite Element Methods	101
4.2 Stability Conditions	105
4.3 Error Equations	109
4.4 Error Estimates	112
4.5 Efficient Implementation via Variable Reduction	115
4.5.1 Theory of Variable Reduction	115
4.5.2 Computational Algorithm with Reduced Variables	119
Chapter 5 Weak Galerkin Finite Element Methods for Steady-State Maxwell's Equations	121
5.1 An Introduction to Maxwell's Equations	121
5.2 Existing Numerical Methods	127
5.3 Weak Divergence and Weak Curl	134
5.4 Weak Galerkin Finite Element Methods	136
5.5 Error Equations	140
5.6 Some Technical Estimates	144
5.7 Optimal Order Error Estimates	148
5.8 A Schur Complement	157
Chapter 6 Weak Galerkin Finite Element Methods for Div-Curl Problems ..	160
6.1 Div-Curl Problems and Their Decomposition	160
6.1.1 Decomposition for Type I Boundary Value Problems	161
6.1.2 Decomposition for Type II Boundary Value Problems	163
6.1.3 A Central Problem of Investigation	165
6.2 Weak Galerkin Finite Element Methods	166
6.3 Stability Conditions	167
6.4 Error Equations	172
6.5 Some Technical Estimates	175

Contents

6.6 Optimal Order Error Estimates	177
Chapter 7 Conclusions and Future Research Topics	185
Bibliography	186
Papers Published and Completed	192
Acknowledgements.....	194

摘要

本文系统研究偏微分方程的弱有限元方法 (Weak Galerkin Finite Element Methods), 简称 WG 方法. 重点讨论重调和方程、麦克斯韦方程组及相关的 div-curl 问题的 WG 有限元方法. 重调和方程起源于弹性薄板理论. 弹性薄板是指其厚度远小于其他两尺寸的弹性体. 麦克斯韦方程组是苏格兰数学物理学家麦克斯韦在 1861 年到 1862 年期间建立的描述电场与磁场关系的四个基本方程. 在麦克斯韦方程组中, 电场和磁场已经成为一个不可分割的整体. 该方程组系统而完整地概括了电磁场的基本规律, 并预言了电磁波的存在. div-curl 问题是求解麦克斯韦方程组的基本单元. 因此, 设计求解这两类问题的高效数值算法既有必要性, 同时又具实际意义. 我们的 WG 有限元方法本身亦是对传统有限元方法的继承和发扬, 它为科学发展中的大量问题提供了一个新的且行之有效的计算工具.

第一章, 我们给出本文所有其它各章节将用到的一些预备知识.

第二章, 我们对重调和方程提出了一种新的高效的数值算法- WG 有限元方法. 这个新的 WG 有限元方法是基于重调和方程的等价于 H^2 半范数的变分形式. 本章特别引入了定义在多边形或多面体有限元剖分上的间断函数的弱 Hessian 和离散弱 Hessian, 并将其成功地应用在相应的变分形式中以构造 WG 有限元离散格式. 如此构造的 WG 有限元方法的矩阵具有对称正定性, 且不依赖于任何参数的选取. 本章理论上建立了在 H^2 等价范数意义下, WG 有限元方法的最优阶误差估计; 以及在 L^2 范数意义下, WG 有限元方法的最优阶误差估计 (最低阶元, 即分片二次元, 除外).

第三章, 我们给出了数值实验来验证第二章所建立的关于 WG 有限元方法的收敛性理论. 我们首先对第二章提出的 WG 有限元方法给出了基于变分形式的数值实验. 由于变分形式导出的矩阵问题的规模比较大, 为减小计算代价, 我们其次对 WG 有限元方法分别推导了基于矩阵形式的 Schur 补, 并给出了相关的数值实验. 数值实验结果充分验证了第二章所建立的关于 WG 有限元格式的有效性和收敛精度.

第四章, 基于第二章提出的 WG 有限元方法, 我们提出了求解重调和方程的杂交 WG (HWG) 有限元方法. HWG 有限元方法引入了定义在单元边界上的 Lagrange 乘子, 该乘子是真解的某种法向导数的数值近似. 本章建立了 HWG 有限元方法的最优阶误差估计, 推导了一个实用的快速计算算法, 即 Schur 补算法. 该 Schur 补算法的精髓是对 WG 有限元方法所形成的矩阵问题消去每个单元内部的自由度, 生成一个仅依赖于单元边界自由度的规模缩小了的线性方程组. 该计算算法极大地降低了 WG 有限元方法的矩阵问题的复杂度.

第五章, 我们对静态麦克斯韦方程组构造了一类高效的 WG 有限元离散格式. 本章特别引入了离散弱旋度和离散弱散度, 并将其应用于相应的变分形式中. 通过强加一个稳定项来确保近似函数的内在弱连续性, 本章成功地构造了一类无参数, 并适用于任意形状多面体剖分的 WG 有限元方法. 在理论层面, 本章建立了麦克斯韦方程组的 WG 有限元方法在一类离散范数下的最优阶误差估计. 通过局部变量消去法, 我们得到一个仅与单元边界自由度相关的线性方程组的 Schur 补形式, 该形式保证了 WG 有限元方法在科学计算中的有效实施.

第六章, 我们针对一类 div-curl 问题构造了高效 WG 有限元离散格式. 这项研究以 Helmholtz 分解为切入点, 首先将 div-curl 问题分解为一个二阶椭圆方程和一个静态麦克斯韦方程组, 此麦克斯韦方程组的边界条件不同于第五章所研究的麦克斯韦方程组. 然后我们对 Helmholtz 分解后得到的麦克斯韦方程组实施 WG 有限元方法. 本章理论研究的亮点聚焦在相应的 WG 有限元逼近解的最优阶误差估计上.

关键词: 弱有限元, Weak Galerkin (WG), 杂交弱有限元, Hybridized WG (HWG), 有限元方法, 偏微分方程, 重调和方程, 麦克斯韦方程组, div-curl 问题, 弱偏导数, 弱旋度, 弱散度, 弱 Hessian, 形状正则, 多边形或多面体剖分, Helmholtz 分解.

Abstract

The goal of this thesis research is to develop new weak Galerkin (WG) finite element methods for partial differential equations. In particular, the research is focused on three partial differential equations: the biharmonic equation, the steady-state Maxwell's equations, and a general div-curl problem. The biharmonic equation arises from the theory of thin plate bending. Thin plates refer to those for which the thickness of the plates is much smaller than its lateral dimensions. Maxwell's equations consist of four partial differential equations describing how electrical and magnetic fields are generated and altered by each other and by charges and currents. In Maxwell's equations, the electrical field and magnetic field are an entirety and undivided, which systematically and integrally summarize the basic laws in electromagnetic field, and predicted the existence of electromagnetic waves. They are named after Scottish mathematician and physicist James Clark Maxwell who published an early form of those equations between 1861 and 1862. The div-curl problem is a basic element for solving Maxwell's equations. Therefore, designing efficient numerical algorithms for the above mentioned problems is necessary and significant in computational sciences. Our WG method is a new development of the classical Galerkin finite element method, which provides an efficient and robust computational technique for many challenging problems in science and engineering.

In Chapter 1, we provide some preliminaries which are valuable for all the remaining presentation in the thesis.

In Chapter 2, we present a new and efficient numerical algorithm for the biharmonic equation by using WG finite element methods. The WG finite element scheme is based on a variational formulation of the biharmonic equation that is equivalent to the usual H^2 -semi norm. Weak Hessian and their approximations, called discrete weak Hessian, are introduced for a class of discontinuous functions defined on a finite element partition of the domain consisting of general polygons or polyhedra. The

resulting matrix from the WG finite element method is symmetric, positive definite and parameter free. An error estimate of optimal order is derived in an H^2 -equivalent norm for the WG finite element solutions. Error estimates in the usual L^2 norm are established, yielding optimal order of convergence for all the WG finite element algorithms except the one corresponding to the lowest order (i.e., piecewise quadratic elements).

In Chapter 3, we present some numerical results to confirm the theory and the accuracy of the WG finite element scheme analyzed in Chapter 2. First, the WG finite element scheme is implemented by using the original variational formulation as proposed in Chapter 2. The matrix problem arising from the original variational formulation contains all the unknowns necessary to represent the functions in the weak finite element space. To reduce the computational cost, we then derive a Schur complement form for the WG finite element method in a matrix form. Numerical tests are conducted for the Schur complement problem. The numerical results confirm the mathematical convergence theory developed in Chapter 2 for the WG finite element method.

In Chapter 4, we present a hybridized formulation for the WG finite element method for the biharmonic equation. The hybridized weak Galerkin (HWG) scheme is based on the use of a Lagrange multiplier defined on the element boundaries. The Lagrange multiplier provides a numerical approximation for certain derivatives of the exact solution. An optimal order error estimate is established for the numerical approximations arising from the HWG finite element method. We also derive a computational algorithm, which is equivalent to the Schur complement, by eliminating all the unknown variables in the interior of each element, yielding a significantly reduced system of linear equations for unknowns on the boundary of each element.

In Chapter 5, we introduce an efficient WG finite element method for the steady-state Maxwell's equations, where discrete weak curl and discrete weak divergence are used in the corresponding variational formulation, additionally with a stabilization term that enforces a weak continuity of the approximating functions. This WG finite element method is parameter free and is highly flexible and robust for the use of fi-

nite element partitions consisting of arbitrary shape-regular polyhedra. Optimal order error estimates are established for the WG finite element approximations in properly-defined discrete norms. An effective implementation of the WG finite element method is developed through variable reduction by following a Schur-complement approach, yielding a system of linear equations involving unknowns associated with element boundaries only.

In Chapter 6, we design a class of WG finite element method for general div-curl problems. Based on the Helmholtz decomposition, the div-curl problems are decomposed into second order elliptic problems plus steady-state Maxwell's equations. The steady-state Maxwell's equations here may have different boundary conditions from that in Chapter 5. A convergence theory is established for the corresponding WG finite element method by deriving some optimal order error estimates for the numerical approximation.

Keywords: Weak Galerkin (WG), Hybridized WG (HWG), finite element method, partial differential equations, biharmonic equation, Maxwell's equations, div-curl problem, weak partial derivatives, weak curl, weak divergence, weak Hessian, shape regular, polygonal or polyhedral meshes, Helmholtz decomposition.

前 言

二十世纪以来, 由于电子计算机研制的成功, 计算机技术的应用已渗透到人类社会的各个领域, 由计算机带来的现代科学正在快速改变着人们传统的工作、学习和生活方式, 并推动着社会的进一步发展. 科学计算, 作为计算机最早的应用领域, 与实验科学和理论科学一并成为当代科学研究方法的三种主要手段之一. 目前, 科学计算已在生物学、流体力学、材料学、金融经济、天文学、地学以及大气科学等诸多领域得到了广泛的应用, 发挥了举足轻重的作用. 科学计算涵盖很多内容, 包括建模、不确定性分析与计算、偏微分方程数值解、数值代数、函数逼近、最优化等. 其中, 因在建模中的广泛应用及其特有的复杂性, 偏微分方程数值解一直以来都是科学计算中最具挑战的中心课题之一 [13].

偏微分方程是继微积分后兴起的一门学科, 其最早起源于 18 世纪 Euler, d'Alembert, Bernoulli, Lagrange 和 Laplace 等科学家的工作. 偏微分方程是描述连续力学的核心工具, 也是分析物理科学模型的主要方式之一. 其有以下两方面作用: 一方面, 偏微分方程可用于描述应用科学中的一些实际现象. 例如, 18 世纪, Euler 建立了描述流体力学中无黏性可压缩和不可压缩流体的 Euler 方程. 到了 19 世纪, 随着物理科学研究对象的拓展, 微分方程迅速发展成为数学的中心学科之一. 另一方面, 从 19 世纪中期开始, 偏微分方程促进了数学其他相关分支的建立与发展. 例如, Poincaré 对 Monge-Ampère 方程、极小曲面方程及其几何意义的研究, 促进了几何学的发展; Donaldson 和 Seiberg-Witten 在四维微分流形的拓扑学所做的大部分工作建立在偏微分方程理论上; 2006 年, 百年难题 Poincaré 猜想的解决充分体现了偏微分方程的伟大性与普遍性. 偏微分方程还与概率论、金融科学、统计分析以及动力系统等诸多数学领域密切相关.

研究偏微分方程最理想的情况是求出其解析解. 然而, 鉴于偏微分方程特有的复杂性, 只有在某些特定情形下, 科学家才能求出极少部分偏微分方程的解析解. 因此, 偏微分方程的数值求解是研究偏微分方程的主要和重要手

段之一. 到目前为止, 偏微分方程数值解在诸多应用领域 (如材料学、火箭发射、航空航天以及卫星发射等) 已发挥了举足轻重的作用.

有限元方法和有限差分方法是求解偏微分方程数值解的主要方法. 有限差分方法起源于 20 世纪 40 年代, 因其建立在对相应偏导数的直接离散的基础上, 有限差分方法易于理解且便于操作. 到目前为止, 有限差分方法在生物学、材料学, 流体力学以及大气模拟中均已得到广泛的应用和推广. 然而, 有限差分方法在处理实际问题时有很大的局限性, 特别是它难以处理自然边界条件以及具有复杂几何区域的问题. 有限元方法是基于传统的 Ritz-Galerkin 方法并融合了有限差分法优点的一类数值方法, 它摒弃了有限差分法直接离散偏导数的朴素思想, 通过积分的概念将复杂问题简单化后再求解. 有限元方法不仅能对原问题提供高精度的数值解, 而且擅长处理各种复杂区域. 目前它已广泛应用于科学工程中许多庞大复杂计算问题的求解.

有限元方法和有限差分方法的区别主要体现在: (1) 有限元方法是从变分原理出发, 而不是像有限差分方法那样从微分方程出发, 亦即有限元方法是从问题的整体而非局部出发; (2) 在二维情形, 有限元方法是对区域作三角形或其他多边形剖分, 而非像有限差分方法那样仅作矩形剖分或基于矩形剖分的离散格点; (3) 有限元方法用剖分区域上的简单函数, 如分片多项式, 逼近原问题的解, 而不是像有限差分方法那样仅在剖分节点上作数值逼近. 有限元方法导出的线性方程组的系数矩阵对称、正定且稀疏, 这给相应的数值求解带来了便利. 目前, 有限元方法已在数学上建立了一套完整的理论体系, 被工程力学界广泛用于数值求解各种定常结构问题. 此外, 有限元方法对不定常问题也有着良好的开展 [54]. 但是, 传统的有限元方法计算量大, 并且其数值解一般不保持系统内在的各种守恒量 (如质量守恒和能量守恒). 因此发展新型、高效、守恒的有限元格式成为亟待解决的问题.

有限元方法在西方和中国分别独立地发展. 在西方, 有限元思想最早在 1943 年 R. Courant 的一篇论文中明确地提出, 但一直以来没有受到人们的重视. 自 20 世纪 50 年代中期, 欧美工程界 J. H. 阿吉里斯, R. W. 克拉夫等以航空工程为背景, 在结构分析与矩阵方法基础上引入了结构有限元的雏形. 60 年代初期, 进一步引入了连续体的单元剖分; 到了 60 年代中期, 逐步确立了有限元方法是变分原理与剖分逼近这两种思想的结合体. 从 1968 年始, 西方数学

家开始对有限元方法进行系统的数学理论研究. 在中国, 60年代初, 冯康、黄鸿慈等科学家为解决大型水坝建设中的应力分析问题, 对椭圆型边值问题数值解进行了系统研究, 为克服传统求解的几何复杂性与材料复杂性问题, 于1964年提出了求解椭圆型边值问题的一套能量法与差分法相结合的有效方法, 称为基于变分原理的差分方法, 也即有限元方法, 并建立了有限元方法的数学理论基础. 此后, 周天孝、唐立民发展了混合元拟协调元, 应隆安等发展了无限元, 冯康等发展了边界有限元, 石钟慈等发展了非协调元, 林群等发展了有限元外推与超收敛理论.

弱有限元方法 (Weak Galerkin Finite Element Methods), 简称 WG 方法, 是求解偏微分方程的一种新的、高效的数值方法. WG 有限元方法最早在 2011 年由王军平和叶秀提出, 并用之求解二阶椭圆问题 [50, 52]. WG 有限元方法的主要思想是对间断函数引入弱微分 (如梯度、二阶偏导数、散度、旋度、Hessian 等), 然后将其应用于通常的变分形式中以对相应的偏微分方程进行数值求解. WG 有限元方法为偏微分方程的数值求解提供了一个全新的思想, 它将经典的 Galerkin 有限元方法提升到了一个新的更高的水平. WG 有限元方法适用于任意形状的有限元剖分及任意椭圆型偏微分方程 (包括二阶椭圆方程、Stokes 方程、Navier-Stokes 方程、弹性方程、Maxwell's 方程、重调和方程等). WG 有限元方法基于间断分片多项式, 其单元构造简便易行, 相应离散代数方程组的适定性不依赖任何参数的选取, 易于实现杂交生成一个更小规模的求解系统, 即局部消去每个单元内部自由度, 生成一个仅依赖于单元边界自由度的线性方程组. 此外, WG 有限元方法所给出的数值解一般保持系统内在的守恒量. 虽然 WG 有限元方法形式上比内罚间断 Galerkin (DG) 有限元方法有相对多的自由度, 但 WG 有限元法单元内部的自由度可以通过杂交形式或 Schur 补形式局部消去, 所形成的代数方程组仅包括单元边界上的自由度, 它比 DG 有限元方法的自由度要少很多. WG 有限元方法的单元刚度矩阵可在每个单元上局部组装, 这与标准的 Galerkin 有限元方法相一致. 目前为止, WG 有限元方法已经成功地应用于数值求解一些偏微分方程, 如 Stokes 方程 [53], 麦克斯韦方程组 [36], 重调和方程 [34, 37, 47] 等, 并且进一步发展了杂交 WG (HWG) 有限元方法 [48]. 本论文的主要目的是发展新的 WG 有限元方法与理论, 特别我们将针对重调和方程、静态麦克斯韦方程组以及 div-curl 问

题来挖掘 WG 有限元方法的潜力, 为 WG 有限元方法在科学计算中的应用打下一个坚实的理论基础.

重调和方程起源于弹性薄板理论 [58, 59]. 弹性薄板是指其厚度远小于其他两尺寸的弹性体. 我们假定板的厚度为常数, 板的材料各向同性. 平分板厚度的平面, 称为中间面. 横向弯曲变形中间面形成的曲面称为板的弹性曲面. 从 18 世纪初, 学者们开始着手研究弹性薄板的挠曲问题, 经过了 3 个多世纪的不断研究与探索, 弹性薄板理论已经得到充分的发展和应用, 现已广泛应用于实际工程中, 包括车辆工程中的车体地板、发动机缸体、齿轮箱箱体、建筑结构的楼板、桥梁的桥面、航空航天工程中飞机壁板、导弹壁板等都属于薄板弯曲问题.

一直以来, 重调和方程的数值求解受到众多学者的关注, 并提出了各种数值求解方法. 在求解重调和方程的有限元方法中, 首先是协调有限元方法, 该方法要求构造的有限元空间是 Sobolev 空间 $H^2(\Omega)$ 的子空间, 也称 H^2 -协调元方法. H^2 -协调元方法本质上要求逼近函数是 C^1 -连续分片多项式. 但 C^1 -连续分片多项式函数的构造是极其困难和复杂的, 因此在实际计算中, 人们很少采用 H^2 -协调元方法来求解重调和方程. 其次是非协调元方法, 分片二次多项式 Morley 元就是一经典的求解重调和方程的非协调元. 非协调元的最大优点是构造简单, 但它缺乏统一的数学理论. 再次是混合有限元方法, 该方法的核心思想是通过将四阶问题转化为两个二阶问题的方程组以避免使用 C^1 元求解 [1, 19, 22, 30, 37]. 混合有限元方法虽然对单元构造的复杂度做了精简, 但相应的代数方程组却不再是正定的了, 这为随之而来的数值求解带来一定的难度, 但并不是不可以解决. 最后是内部加罚 DG 有限元方法, 比如文献 [9, 18] 提出了求解重调和方程的 C^0 内罚方法, 文献 [33] 提出了求解重调和方程的 hp 内罚 DG 方法. 内罚 DG 有限元方法基于间断分片多项式, 其单元构造简单, 但缺点是: (1) 离散格式的适定性依赖某些参数的选取, (2) 单元刚度矩阵不能局部地在每个单元形成, (3) 相应的离散格式或许不再对称.

麦克斯韦方程组是 19 世纪苏格兰数学物理学家麦克斯韦建立的一组偏微分方程, 用于描述电场、磁场与电荷密度、电流密度之间的关系. 麦克斯韦方程组包括四个方程: 电荷产生电场的高斯定理; 论述磁单极子不存在的高斯磁定律; 电流和变化的电场产生磁场的麦克斯韦-安培定律, 变化的磁场产生

电场的法拉第电磁感应定律. 在麦克斯韦方程组中, 电场和磁场是不可分割的整体. 该方程组完整地概括了电磁场的基本规律, 并预言了电磁波的存在. 麦克斯韦进一步结合电场和磁场的规律, 建立了电磁场理论体系, 其核心是麦克斯韦方程组. 目前为止, 科学家们对麦克斯韦方程组的求解已提出各种不同的数值方法, 代表性的包括 $H(\text{curl}; \Omega)$ -协调元方法 [5, 28, 31, 38, 39], DG 方法 [6, 7, 24, 25, 40, 41], 以及混合 DG 方法 [26].

本文的主要内容及结论如下: 第一章, 我们给出本文中其他各章节用到的一些预备知识. 第二章, 我们提出了一种求解重调和方程的高效 WG 有限元方法, 并给出相应的理论分析, 推导了 H^2 等价范数意义下的最优阶误差估计, 以及 L^2 范数意义下的最优阶误差估计 (最低阶元, 即分片二次元, 除外). 第三章, 基于第二章提出的 WG 有限元方法, 我们推导了 WG 方法的 Schur 补, 并分别从变分和 Schur 补矩阵形式出发, 对 WG 有限元格式进行了数值实验, 数值实验结果充分验证了第二章所建立的收敛性理论. 第四章, 同样基于第二章的算法, 我们提出了求解重调和方程的一类杂交 WG 有限元方法, 并建立了最优阶误差估计, 以及推导了一个快速计算算法 (Schur 补). 第五章, 我们提出了求解一类静态麦克斯韦方程组的 WG 有限元方法, 并建立了在离散范数意义下的最优阶误差估计. 第六章, 我们研究 div-curl 问题的数值方法, 提出了 div-curl 问题的 WG 有限元方法, 并建立了离散范数意义下最优阶误差估计.

第 1 章 预备知识

本章给出本文中其他各章节用到的一些预备知识, 包括 Sobolev 空间的相关知识; $H(\text{div})$ 和 $H(\text{curl})$ 空间的定义及其性质; 有限元的定义, 有限元空间的构造及其性质; 以及形状正则剖分上有限元空间的性质.

1.1 Sobolev 空间

本节给出 Sobolev 空间的相关知识, Sobolev 空间的详细内容可参考 [29, 55].

假设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) 为有界连通区域, 其边界记作 $\partial\Omega$. 当 m 为非负整数或 ∞ 时, Ω 、 $\bar{\Omega}$ 上所有 m 次连续可微函数构成的集合分别记作 $C^m(\Omega)$ 、 $C^m(\bar{\Omega})$, $C^m(\Omega)$ 中所有紧支集包含在 Ω 的函数构成的集合记作 $C_0^m(\Omega)$.

$L^p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 表示 Ω 上所有 p 次可积实值函数构成的集合, $L^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上所有本性有界的可测函数构成的集合. 按范数

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

$L^p(\Omega)$ 为 Banach 空间. 当 $p = 2$ 时, $L^2(\Omega)$ 为 Hilbert 空间, 其内积定义为

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} uv dx.$$

称分量均为非负整数的向量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ 为多重指标, 记 $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. 利用多重指标, 偏导数算子可记为

$$\partial^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

定义 1.1.1. 对于 Ω 上局部 Lebesgue 可积函数 u , 如果存在 Ω 上的局部 Lebesgue 可积函数 v , 满足

$$\int_{\Omega} v \phi d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^{\alpha} \phi d\mathbf{x}, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

则称 v 是 u 的一个广义导数, 记为 $\partial^{\alpha} u$.

显然, 广义导数是古典导数的推广.

对于非负整数 m 和实数 $p \in [1, \infty]$, 定义

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^{\alpha} u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上定义 Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ 如下:

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |\partial^{\alpha} u(\mathbf{x})|,$$

则 $W^{m,p}(\Omega)$ 构成一个 Banach 空间, 称 $W^{m,p}(\Omega)$ 为 Ω 上的 Sobolev 空间. 进一步, 定义半范数 $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ 如下:

$$|u|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$|v|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=m} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |\partial^{\alpha} u(\mathbf{x})|.$$

当 $p = 2$ 时, 记 $W^{m,p}(\Omega)$ 为 $H^m(\Omega)$, 相应的范数记为 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$.

定义 1.1.2. 称 X (连续地) 嵌入到 Y , 记为 $X \hookrightarrow Y$, 如果满足: (1) $X \subset Y$; (2) X 到 Y 具有连续内射, 即存在常数 $C > 0$, 对任意的 $x \in X$, 成立

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X.$$

定理1.1.1. (嵌入定理) 假设区域 Ω 具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$, $1 \leq p \leq \infty$. 如果 $m \geq k + 1$, 则当 $m < k + \frac{n}{p}$ 时,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad 1 \leq q \leq \frac{np}{n - (m - k)p};$$

当 $m = k + \frac{n}{p}$ 时,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad 1 \leq q < \infty;$$

当 $m > k + \frac{n}{p}$ 时,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\bar{\Omega}).$$

对函数 $u \in W^{m,p}(\Omega)$, 定义迹算子 $\text{tr} : u \rightarrow u|_{\partial\Omega}$, 其中 $u|_{\partial\Omega}$ 称为函数 u 在边界 $\partial\Omega$ 的迹. 关于迹算子成立如下定理.

定理1.1.2. 假设区域 Ω 具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$, 且分片 m 阶光滑. 令 $1 \leq p \leq \infty$, $n > 1$. 如果 $m \geq 1$, 则当 $mp < n$ 时,

$$\text{tr} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega), \quad 1 \leq q \leq \frac{(n-1)p}{n-mp},$$

连续; 当 $mp = n$ 时,

$$\text{tr} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega), \quad 1 \leq q < \infty,$$

连续.

我们将 $W^{m,p}(\Omega)$ 和 $L^q(\partial\Omega)$ 的上述关系称为 $W^{m,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^q(\partial\Omega)$.

令 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)'$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量 (见图 1-1), 则当 $\partial\Omega$ 分片光滑时, \mathbf{n} 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处存在. 对于 $C^2(\bar{\Omega})$ 中的函数, 法向导数算子

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{i=1}^d n_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

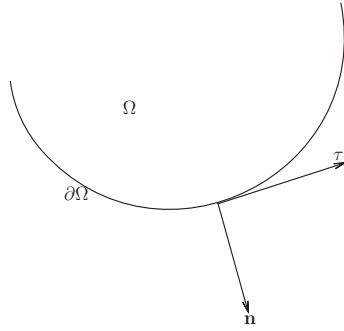


图 1-1 区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的外法向 \mathbf{n} 和切向量 $\boldsymbol{\tau}$.

在 $\partial\Omega$ 上几乎处处有定义. 类似于迹算子, 将法向导数算子延拓到 $W^{2,p}(\Omega)$,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{i=1}^d n_i \mathbf{tr} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

当 $m = 1, 2$ 时, 定义 $W^{m,p}(\Omega)$ 的子空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 为

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

$$W_0^{2,p}(\Omega) = \left\{v \in W^{2,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

特别地, 当 $p = 2$ 时,

$$H_0^2(\Omega) = \left\{v \in H^2(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

以下给出 Green 公式和 Sobolev 空间中几个常用不等式.

(Green 公式) 对 $u, v \in H^1(\Omega)$, 成立

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u v n_i ds - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x}, \quad i = 1, \dots, d.$$

(Minkowski 不等式) 假设 $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in L^p(\Omega)$, 则

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

(Hölder 不等式) 假设 $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, 则 $f \cdot g \in L^1(\Omega)$, 且

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

(Cauchy-Schwarz 不等式) 当 $p = q = 2$ 时, Hölder 不等式为

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

定理 1.1.3. (等价模定理) 令 $P_k(\Omega)$ ($k \geq 0$) 表示 Ω 上次数不超过 k 的多项式全体, $N = \dim P_k(\Omega)$. 假设 $f_i \in (W^{k+1,p}(\Omega))'$, $i = 1, \dots, N$, $p \in [1, \infty]$. 当 $f_i(q) = 0$, $1 \leq i \leq N$, $q \in P_k(\Omega)$ 时, $q = 0$. 则存在正常数 β_1, β_2 , 使得对任意的 $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, 成立

$$\beta_1 \left\{ |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |f_i(v)| \right\} \leq \|v\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq \beta_2 \left\{ |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |f_i(v)| \right\}.$$

推论 1.1.1. (Friedrichs 不等式) 假设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Gamma \subset \partial\Omega$, $\text{meas}\Gamma > 0$, 则对任意的 $u \in H^1(\Omega)$, 存在常数 C , 使得

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C \left(|u|_{1,\Omega} + \left| \int_{\Gamma} u ds \right| \right).$$

推论 1.1.2. (Poincaré 不等式) 假设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 则对任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$, 存在常数 C , 使得

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C |u|_{1,\Omega}.$$

上述 Poincaré 不等式给出了 $H_0^1(\Omega)$ 中范数和半范之间的等价性.

推论 1.1.3. (Friedrichs-Poincaré 不等式) 假设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 则对任意的

$u \in H^1(\Omega)$, 存在常数 C , 使得

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq C \left(|u|_{1,\Omega} + \left| \int_{\Omega} u d\mathbf{x} \right| \right).$$

最后, 我们给出本文中常用的一些记号. \mathbb{R} 和 \mathbb{C} 分别表示实数和复数. 假设 D 是 \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) 中具有 Lipschitz 连续边界 ∂D 的有界区域, $L^2(D)$ 的范数和内积分别记作 $\|\cdot\|_D$ 和 $(\cdot, \cdot)_D$, $L^2(\partial D)$ 的内积记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial D}$. 当 $D = \Omega$ 时, $\|\cdot\|_{\Omega}$, $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial \Omega}$ 分别简记为 $\|\cdot\|$, (\cdot, \cdot) 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$. 字母 C 表示与网格大小以及函数无关的常数, 在不同地方出现的字母 C 表示不同的常数. $(\cdot, \dots, \cdot)'$ 表示向量 (\cdot, \dots, \cdot) 的转置. $\delta_{i,j}$ 为 Kronecker 符号, 当 $i = j$ 时, 取值为 1; 当 $i \neq j$ 时, 取值为 0.

1.2 $H(\operatorname{div})$ 和 $H(\operatorname{curl})$ 空间

本节介绍散度算子, 旋度算子, $H(\operatorname{div})$ 和 $H(\operatorname{curl})$ 空间, 以及一些常用的结论, 详细内容可参考 [31].

对任意的 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)' \in (C^1(\Omega))^3$, \mathbf{v} 的旋度算子记作 $\nabla \times \mathbf{v}$, 定义为

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

特别地, 对任意的 $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^3$, 成立

$$(\nabla \times \mathbf{v}, \varphi) = (\mathbf{v}, \nabla \times \varphi).$$

对任意的 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)' \in (C^1(\Omega))^3$, \mathbf{v} 的散度算子记作 $\nabla \cdot \mathbf{v}$, 定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

特别地, 对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 成立

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}, \varphi) = -(\mathbf{v}, \nabla \varphi).$$

由导数的定义, 易证

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla p) &= 0, & \forall p \in C^2(\Omega), \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) &= 0, & \forall \mathbf{v} \in (C^2(\Omega))^3.\end{aligned}$$

函数本身及其散度平方可积的向量函数构成的空间记作 $H(\text{div}; \Omega)$, 即

$$H(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 : \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

相关范数定义为

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\text{div}; \Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 $H(\text{div}; \Omega)$ 的子空间

$$H_0(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

其中 \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法方向.

函数本身及其旋度平方可积的向量函数构成的空间记作 $H(\text{curl}; \Omega)$, 即

$$H(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 : \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3\},$$

相关范数定义为

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\text{curl}; \Omega)} = \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 $H(\text{curl}; \Omega)$ 的子空间

$$H_0(\text{curl}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in H(\text{curl}; \Omega) : \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

其中 \mathbf{n} 为 $\partial\Omega$ 的单位外法方向.

定理1.2.1. (散度定理) 假设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 具有 Lipschitz 连续边界

$\partial\Omega$. 如果 $\mathbf{F} \in (C^1(\bar{\Omega}))^d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, 则成立

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (1.2.1)$$

其中 \mathbf{n} 为边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向.

基于散度定理, 易证得如下重要公式.

推论1.2.1. 假设有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$, \mathbf{n} 为边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向.

(1) 如果 $\xi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\mathbf{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$, 那么

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \xi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \xi d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \xi ds.$$

(2) (Green 第一公式) 如果 $\xi \in C^1(\bar{\Omega})$, $p \in C^2(\bar{\Omega})$, 那么

$$\int_{\Omega} \Delta p \xi d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla \xi d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \xi ds.$$

(3) (Green 第二公式) 如果 $\xi \in C^2(\bar{\Omega})$, $p \in C^2(\bar{\Omega})$, 那么

$$\int_{\Omega} (\Delta p \xi - p \Delta \xi) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \xi - \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{n}} p \right) ds.$$

(4) 如果 $\mathbf{u}, \varphi \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$, 那么

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \varphi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \times \varphi d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{u} \cdot \varphi ds.$$

假设 \mathcal{S} 表示二维平面 (x_1, x_2) 中具有 Lipschitz 连续边界的有界区域, 给定可微函数 $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, 定义

$$\vec{\nabla}_{\mathcal{S}} \times \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)'$$

给定向量函数 $\mathbf{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))'$, 定义

$$\nabla_S \times \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

推论1.2.2. (Stoke's 定理) 假设有界区域 $S \subset \mathbb{R}^2$ 具有 Lipschitz 连续边界 ∂S . τ 表示边界 ∂S 的单位切向, 其由边界 ∂S 的单位外法向 \mathbf{n} 逆时针旋转 90 度得到. 如果 $\mathbf{u} \in (C^1(\bar{S}))^2$, $\xi \in C^1(\bar{S})$, 那么

$$\int_S \nabla_S \times \mathbf{u} \xi d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{u} \vec{\nabla}_S \times \xi d\mathbf{x} + \int_{\partial S} \tau \cdot \mathbf{u} \xi ds.$$

1.3 经典有限元方法概述

有限元方法是求解偏微分方程数值解的有效方法之一, 其大致思想是首先将偏微分方程转化为一个与之等价的变分形式, 对区域进行剖分, 构造相应的有限元空间, 然后将变分问题在有限元空间中离散, 最后求出偏微分方程在有限元空间中的近似解. 本节给出有限元的定义、有限元空间及常用的一些性质、定理和结论. 详细内容可参考 [8, 12, 15, 54].

定义1.3.1. (有限元) 称 $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 为一个有限元, 如果满足

- (1) $T \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 是具有分片光滑边界的有界区域 (元域),
- (2) \mathcal{P} 是定义在 T 上的有限维函数空间 (形函数),
- (3) $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_k\}$ 是空间 \mathcal{P}' 的一组基 (节点变量集合).

定义1.3.2. 假设 $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 是一个有限元, 称 \mathcal{P} 中 \mathcal{N} 的对偶基 $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ 为 \mathcal{P} 的一组节点基, 若满足 $N_j(\phi_i) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, k$.

定义1.3.3. 称两个有限元 $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ 和 $(\hat{T}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$ 仿射等价, 如果存在可逆的仿射变换 F_T , 使得

$$T = F_T(\hat{T}),$$

$$\mathcal{N} = F_T(\hat{\mathcal{N}}),$$

$$\mathcal{P} = \{\phi : \phi = \hat{\phi} \circ F_T^{-1}, \hat{\phi} \in \hat{\mathcal{P}}\}.$$

一族有限元称为仿射等价有限元族, 如果它所有的有限元都仿射等价于某个单一的有限元. 该单一的有限元称为参考有限元, 也称标准有限元.

假设 Ω 是 \mathbb{R}^d 中具有 Lipschitz 连续边界的有界区域. 将区域 $\bar{\Omega}$ 剖分为有限个子区域, 称之为单元, 记作 T . 单元 T 的大小记作 $h_T = \text{diam}T$, 单元 T 的面积记作 $|T|$. 由所有单元 T 构成的集合记作 \mathcal{T}_h , \mathcal{T}_h 的网格大小记作 $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$. 记 $\rho_T = \sup\{\text{diam}S : \text{球 } S \subset T\}$.

定义1.3.4. (有限元剖分) 称 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 的有限元剖分, 如果满足:

- (1) $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$;
- (2) 单元 T 的边界 Lipschitz 连续;
- (3) 单元 T 是内部非空且连通的闭集;
- (4) 对任意两个不同的单元 $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$,

$$T_1 \cap T_2 = \begin{cases} \text{空集,} \\ \text{一条公共边,} \\ \text{一个公共顶点.} \end{cases}$$

定义1.3.5. (正则剖分) 称剖分 \mathcal{T}_h 为正则剖分, 如果存在常数 C , 使得

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq C, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, h > 0, h \rightarrow 0.$$

以下给出在一般单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上的插值误差估计.

定理1.3.1. 假设 $(\hat{T}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$ 是参考有限元, 且

$$\begin{cases} W^{k+1,p}(\hat{T}) \hookrightarrow C^s(\hat{T}), \\ W^{k+1,p}(\hat{T}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{T}), \\ P_k(\hat{T}) \subset \hat{\mathcal{P}} \subset W^{m,q}(\hat{T}), \end{cases}$$

其中 s 是 $\hat{\mathcal{N}}$ 中导数最高阶. 又设 $\{(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})\}_{T \in \mathcal{T}_h}$ 是仿射等价有限元族, 则

$$|v - \Pi_T v|_{m,q,T} \leq C |T|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1,p,T}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(T),$$

其中 $\Pi_T v$ 表示 v 在 T 上的 \mathcal{P} 插值, C 是只与 $\hat{T}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}}$ 有关的常数.

定理1.3.2. (逆不等式) 假设 \mathcal{T}_h 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 的正则剖分, $P(T)$ 是定义在单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上的多项式空间, 则存在与 p 和 T 无关的正常数 C , 使得

$$|p|_{1,T} \leq Ch_T^{-1} \|p\|_{0,T}, \quad \forall p \in P(T), T \in \mathcal{T}_h, \quad (1.3.1)$$

$$\|p\|_{0,\infty,T} \leq Ch_T^{-\frac{d}{2}} \|p\|_{0,T}, \quad \forall p \in P(T), T \in \mathcal{T}_h. \quad (1.3.2)$$

定义1.3.6. (拟一致条件) 如果存在常数 $C > 0$, 使得

$$\frac{h}{h_T} \leq C, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, h \rightarrow 0, \quad (1.3.3)$$

称条件 (1.3.3) 为拟一致条件.

引理1.3.1. 如果剖分 \mathcal{T}_h 满足正则性条件和拟一致条件, 有限元族 $\{(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)\}_{T \in \mathcal{T}_h}$ 仿射等价于一个参考元 $(\hat{T}, \hat{\mathcal{P}}_{\hat{T}}, \hat{\mathcal{N}}_{\hat{T}})$, 且 $l \leq m$,

$$\hat{\mathcal{P}} \subset W^{l,r}(\hat{T}) \cap W^{m,q}(\hat{T}), \quad 1 \leq r, q \leq \infty,$$

则存在常数 $C = C(\sigma, \nu; l, r; m, q)$, 使得对任意的 $v_h \in X_h$,

$$\left(\sum_T |v_h|_{m,q,T}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{(h^n)^{\max\{0, \frac{1}{r} - \frac{1}{q}\}}} h^{m-l} \left(\sum_T |v_h|_{l,r,T}^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (1.3.4)$$

其中分片多项式空间 X_h 定义为

$$X_h = \{v_h : v_h|_T \in \mathcal{P}_T \longleftrightarrow \hat{\mathcal{P}} \subset W^{l,r}(\hat{T}) \cap W^{m,q}(\hat{T})\}.$$

定理1.3.3. (Lax-Milgram 定理) 假设 V 是 Hilbert 空间, 记范数为 $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $V \times V$ 上的双线性泛函, 如果满足:

(1) 有界性: 存在连续常数 $M > 0$, 使得对任意的 $v, w \in V$,

$$|a(v, w)| \leq M \|v\|_V \|w\|_V.$$

(2) 强制性: 存在强制常数 $\alpha > 0$, 使得对任意的 $v \in V$,

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

则对任意的 $f \in V'$, 存在唯一的 $u \in V$, 使得对任意的 $v \in V$, 成立

$$a(u, v) = f(v). \quad (1.3.5)$$

如果有限元空间 V_h 是 Hilbert 空间 V 的子空间, 则称相应的有限元空间为协调有限元空间. 否则, 称为非协调有限元空间.

对于协调元空间, 求解变分问题 (1.3.5) 的 Ritz-Galerkin 方法是:

求 $u_h \in V_h$, 使得

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.3.6)$$

下面给出有限元离散问题 (1.3.6) 解的误差估计.

引理1.3.2. (Céa 引理) 假设 $a(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $V \times V$ 上有界、强制的双线性型, u 和 u_h 分别为原问题 (1.3.5) 和 Ritz-Galerkin 离散问题 (1.3.6) 的解, 则存在常数 $C > 0$, 使得

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

对于非协调元空间, 假设存在更大的 Hilbert 空间 H , 使得 $V \subset H$, $V_h \subset H$. 取 $H = V \oplus V_h$. 双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 延拓到 $H \times H$, 记为 $a_h(\cdot, \cdot)$; $f \in V'$ 延拓到 H' , 记为 f_h ; 且满足

$$a_h(u, v) = a(u, v), \quad \forall u, v \in V,$$

$$f_h(v) = f(v), \quad \forall u, v \in V.$$

对于非协调元空间, 求解变分问题 (1.3.5) 的 Ritz-Galerkin 方法是:

求 $u_h \in V_h$, 使得

$$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (1.3.7)$$

我们有如下收敛性结论.

引理1.3.3. (Strang 引理) 设 $a_h(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $H \times H$ 上有界, 强制的双线性型, $f_h \in H'$, 则 Ritz-Galerkin 离散问题 (1.3.7) 存在唯一解, 且成立如下估计式:

$$\|u - u_h\|_H \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_H + \frac{1}{\alpha} \sup_{v_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|a_h(u, v_h) - f_h(v_h)|}{\|v_h\|_H}.$$

以下我们介绍 Babuska 在 1972 年提出的一个引理.

定理1.3.4. 设 V 是实 Hilbert 空间, $a(u, v)$ 是定义在 $V \times V$ 上的连续双线性泛函. 又设

(1)

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$$

(2)

$$\sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \beta \|u\|_V, \quad \forall u \in V, \quad (1.3.8)$$

(3)

$$\sup_{u \in V} |a(u, v)| > 0, \quad \forall v \neq 0, \quad (1.3.9)$$

其中 M, β 为有限常数. 又设 $f \in V'$, 则存在唯一的 $u^* \in V$, 使得

$$a(u^*, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.3.10)$$

且

$$\|u^*\|_V \leq \frac{1}{\beta} \|f\|_{V'}.$$

考虑 (1.3.10) 的 Ritz-Galerkin 逼近: 假设有限维空间 $V_h \subset V$, 给定 $f \in V'$, 求 $u_h \in V_h$, 使得

$$a(u_h, v) = f(v), \quad \forall v \in V_h. \quad (1.3.11)$$

(1.3.11) 即为 (1.3.10) 的 Ritz-Galerkin 逼近.

定理1.3.5. 假设双线性型 $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足定理 1.3.4 的条件. 取有限维空间 $V_h \subset V$, 使得 (1.3.8), (1.3.9) 成立, 则

$$\|u^* - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{M}{\beta}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|u^* - w_h\|_V.$$

注1.3.1. 如果子空间 V_h 和双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 满足 (1.3.8), 通常也称 $a(\cdot, \cdot)$ 满足 inf-sup 条件或 LBB 条件.

以下介绍混合有限元方法中著名的 Brezzi 理论. 假设 U, V 为实 Hilbert 空间. 假设 $a(\cdot, \cdot)$ 是定义在 $U \times U$ 上的双线性泛函, 且存在常数 $M_1 > 0$, 使得

$$|a(u_1, u_2)| \leq M_1 \|u_1\|_U \|u_2\|_U;$$

$b(u, v)$ 是定义在 $U \times V$ 上的双线性泛函, 且存在常数 $M_2 > 0$, 使得

$$|b(u, v)| \leq M_2 \|u\|_U \|v\|_V;$$

设 $f \in U'$, $g \in V'$. 考虑下列问题: 求 $u \in U$, $v \in V$, 使得

$$\begin{aligned} a(u, w) + b(w, v) &= f(w), & \forall w \in U, \\ b(u, z) &= g(z), & \forall z \in V. \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

又设 U_h, V_h 分别为 U 和 V 的有限维子空间. 考虑 (1.3.12) 的近似解, 即求 $u_h \in U_h, v_h \in V_h$, 使得

$$\begin{aligned} a(u_h, w) + b(w, v_h) &= f(w), & \forall w \in U_h, \\ b(u_h, z) &= g(z), & \forall z \in V_h. \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

定理1.3.6. (Brezzi 定理) 假设

(1) 存在常数 $\alpha > 0$, 使得

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_U^2, \quad \forall u \in U_0.$$

(2) 存在常数 $\beta > 0$, 使得

$$\sup_{u \in U} \frac{b(u, v)}{\|u\|_U} \geq \beta \|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

则问题 (1.3.12) 存在唯一解 u, v , 且满足

$$\|u\|_U + \|v\|_V \leq C(\|f\|_{U'} + \|g\|_{V'}),$$

其中

$$U_0 = \{u \in U : b(u, v) = 0, \quad \forall v \in V\},$$

且 C 为只依赖于 α, β 和 M_1 的常数.

定理 1.3.7. 假设

(1) 存在常数 $\tilde{\alpha} > 0$, 使得

$$a(u, u) \geq \tilde{\alpha} \|u\|_{U_h}^2, \quad \forall u \in U_{h0},$$

(2) 存在常数 $\tilde{\beta} > 0$, 使得

$$\sup_{u_h \in U_h} \frac{b(u_h, v_h)}{\|u_h\|_{U_h}} \geq \tilde{\beta} \|v_h\|_{V_h}, \quad \forall v_h \in V_h,$$

则问题 (1.3.13) 存在唯一解, 且存在只依赖于 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ 与 M_1, M_2 的常数 C , 使得

$$\|u - u_h\|_U + \|v - v_h\|_V \leq C \left\{ \inf_{w \in U_h} \|u - w\|_U + \inf_{z \in V_h} \|v - z\|_V \right\},$$

其中,

$$U_{h0} = \{u_h \in U_h : b(u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h\}.$$

定理 1.3.7 中的条件 (2) 称为离散的 LBB 条件.

在混合有限元方法中, 构造有限元空间的关键是使之满足离散的 LBB 条件, 对任意给定的空间组合 $U_h \times V_h$, 对其验证相应的 LBB 条件一般来讲不太

容易. Fortin 在 1977 年提出另外一个相对简单而又实用的判别准则, 称之为 Fortin 准则.

定理1.3.8. (Fortin 准则) 假设双线性形式 $b : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 inf-sup 条件, 如果对混合有限元空间 U_h, V_h 存在一个有界线性算子 $\pi_h : U \rightarrow U_h$ 使得

$$(1) \quad b(u - \pi_h u, v) = 0, \quad \forall v \in V_h,$$

$$(2) \quad \|\pi_h v\|_U \leq C\|v\|_U, \quad \forall v \in U,$$

其中常数 C 与 h 无关, 则有限元空间 U_h, V_h 满足离散 LBB 条件.

我们给出 L^2 投影的定义及其性质.

定义1.3.7. (L^2 投影) 称 Q_h 是 $L^2(\Omega)$ 到有限元空间 V_h 的 L^2 投影, 如果满足

$$(Q_h v, w) = (v, w), \quad \forall w \in V_h.$$

对 L^2 投影算子 Q_h , 我们有以下估计.

定理1.3.9. 对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$, 存在常数 C , 使得

$$\|v - Q_h v\| \leq Ch|v|_1,$$

$$|Q_h v|_1 \leq C|v|_1.$$

证明 设算子 $\hat{\pi}_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ 是 Clément 插值算子, 则对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|v - \hat{\pi}_h v\| + h|\hat{\pi}_h v|_1 \leq Ch|v|_1. \quad (1.3.14)$$

由 L^2 投影的性质及 (1.3.14),

$$\|v - Q_h v\| \leq \|v - \hat{\pi}_h v\| \leq Ch|v|_1.$$

由三角不等式, 逆不等式 (1.3.1), (1.3.14),

$$|Q_h v|_1 \leq |Q_h v - \hat{\pi}_h v|_1 + |\hat{\pi}_h v|_1$$

$$\begin{aligned}
 &\leq Ch^{-1}\|Q_h v - \hat{\pi}_h v\| + C|v|_1 \\
 &\leq Ch^{-1}(\|v - Q_h v\| + \|v - \hat{\pi}_h v\|) + C|v|_1 \\
 &\leq C|v|_1.
 \end{aligned}$$

定理得证. \square

1.4 形状正则剖分上有限元空间的性质

本节给出任意多边形或多面体有限元正则剖分上有限元空间的性质, 具体内容可参考文献 [34, 52].

定义1.4.1. 称有限元剖分 \mathcal{T}_h 为正则剖分, 如果满足 (见图1-2):

A1. 存在正常数 ϱ_v, ϱ_e , 对单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 的边或面 e , 成立

$$\varrho_v h_T^d \leq |T|, \quad \varrho_e h_e^{d-1} \leq |e|.$$

A2. 存在正常数 κ , 对单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 的边或面 e , 成立

$$\kappa h_T \leq h_e.$$

A3. 边为直线或面为平面. 对任意的 $T \in \mathcal{T}_h$, 存在 T 中棱锥体 $P(e, T, A_e)$, 使得棱锥体以 $e \subset \partial T$ 为底, $A_e \in T$ 为顶点, 高为 $\sigma_e h_T$, 比例常数 $\sigma_e \geq \sigma^* > 0$, 且对任意 $x_e \in e$, 向量 $x_e A_e$ 和 e 的外法向形成的夹角为锐角.

A4. 对任意的 $T \in \mathcal{T}_h$, 存在形状正则的外接单纯形 $S(T)$, 其直径 $h_{S(T)}$ 与 h_T 成正比, 即 $h_{S(T)} \leq \gamma_* h_T$, 其中 γ_* 是与单元 T 无关的常数. 且每个外接单纯形 $S(T)$ 与 \mathcal{T}_h 中有限个单元相交.

引理1.4.1. (迹不等式) 假设 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 的二维多边形或三维多面体有限元剖分, 且剖分 \mathcal{T}_h 满足定义 1.4.1 中正则性假设 (A1)-(A3). 令 $p > 1$. 对任意的单元

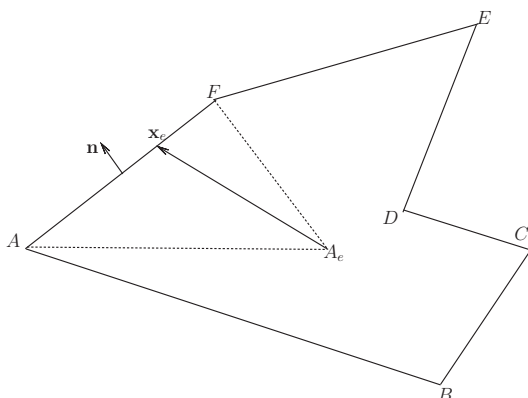


图 1-2 形状正则的多边形元 ABCDEFA.

$T \in \mathcal{T}_h$, 以及任意的边或面 $e \subset \partial T$, 存在常数 C , 使得对任意的 $\theta \in W^{1,p}(T)$, 成立

$$\|\theta\|_{L^p(e)}^p \leq Ch_T^{-1} \left(\|\theta\|_{L^p(T)}^p + h_T^p \|\nabla \theta\|_{L^p(T)}^p \right). \quad (1.4.1)$$

证明 我们对 e 为平面, $\theta \in C^1(T)$ 的情况给出证明. 假设平面 e 的参数方程为

$$\mathbf{x}_e = \phi(\xi, \eta) = (\phi_1(\xi, \eta), \phi_2(\xi, \eta), \phi_3(\xi, \eta)), \quad (1.4.2)$$

其中 $(\xi, \eta) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

由假设 (A3), 存在单元 T 中以 $A_e = \mathbf{x}_* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 为顶点的棱锥体 $P(e, T, A_e)$, 其参数方程为

$$\mathbf{x}(t, \xi, \eta) = (1-t)\phi(\xi, \eta) + t\mathbf{x}_*,$$

其中 $(t, \xi, \eta) \in [0, 1] \times D$. 对任意给定的 $\mathbf{x}_e \in e$, 连接 \mathbf{x}_e 和顶点 \mathbf{x}_* 的线段表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e + t(\mathbf{x}_* - \mathbf{x}_e).$$

由微积分基本定理,

$$|\theta|^p(\mathbf{x}_e) - |\theta|^p(\mathbf{x}(t)) = - \int_0^t \partial_\tau (|\theta|^p(\mathbf{x}_e + \tau\omega)) d\tau,$$

这里, $\omega = \mathbf{x}_* - \mathbf{x}_e$. 上式可化简为

$$|\theta|^p(\mathbf{x}_e) - |\theta|^p(\mathbf{x}(t)) = -p \int_0^t |\theta|^{p-1} \operatorname{sgn}(\theta) (\nabla \theta \cdot \omega) d\tau.$$

取 $q = \frac{p}{p-1}$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 对任意的 $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$|\theta|^p(\mathbf{x}_e) \leq |\theta|^p(\mathbf{x}(t)) + p \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\theta|^p |\omega| d\tau \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |\nabla \theta|^p |\omega| d\tau \right)^{\frac{1}{p}}.$$

对任意的非负实数 a, b, ε , 由 Young's 不等式 $ab \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-\frac{q}{p}} b^q$,

$$|\theta|^p(\mathbf{x}_e) \leq |\theta|^p(\mathbf{x}(t)) + p\varepsilon^{-\frac{q}{p}} \int_0^{\frac{1}{2}} |\theta|^p |\omega| d\tau + p\varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} |\nabla \theta|^p |\omega| d\tau.$$

对上式在平面 e 上积分, 由参数方程 (1.4.2),

$$\int_D |\theta|^p(\mathbf{x}_e) |\phi_\xi \times \phi_\eta| d\xi d\eta \leq \int_D |\theta|^p(\mathbf{x}(t)) |\phi_\xi \times \phi_\eta| d\xi d\eta \quad (1.4.3)$$

$$+ p\varepsilon^{-\frac{q}{p}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_D |\theta|^p |\omega| |\phi_\xi \times \phi_\eta| d\xi d\eta d\tau \quad (1.4.4)$$

$$+ p\varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} \int_D |\nabla \theta|^p |\omega| |\phi_\xi \times \phi_\eta| d\xi d\eta d\tau. \quad (1.4.5)$$

考虑在旁面三角台

$$P_{\frac{1}{2}} = \left\{ \mathbf{x}(\tau, \xi, \eta) : (\tau, \xi, \eta) \in [0, \frac{1}{2}] \times D \right\}$$

的积分

$$\int_{P_{\frac{1}{2}}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_D f(\mathbf{x}(\tau, \xi, \eta)) J(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau,$$

其中 $J(\tau, \xi, \eta) = (1-\tau)^2 |(\phi_\xi \times \phi_\eta) \cdot \omega|$ 为坐标变换的雅可比行列式. 向量 $\phi_\xi \times \phi_\eta$ 与面 e 正交, 且 $\omega = \mathbf{x}_* - \mathbf{x}_e$ 为从基点 \mathbf{x}_e 到顶点 \mathbf{x}_* 的向量. 棱柱 $P(e, T, A_e)$ 的

角假设 (A3) 表明雅可比行列式满足

$$J(\tau, \xi, \eta) \geq \frac{\mu_0}{4} |\phi_\xi \times \phi_\eta| |\omega|, \quad \tau \in [0, \frac{1}{2}], \quad (1.4.6)$$

其中 $\mu_0 \in (0, 1)$ 固定. 注意到 (1.4.4) 的左端是 $|\theta|^p$ 在面 e 的面积分. 将 (1.4.6) 代入 (1.4.4) 和 (1.4.5),

$$\begin{aligned} \int_e |\theta|^p de &\leq \int_D |\theta|^p(\mathbf{x}(t)) |\phi_\xi \times \phi_\eta| d\xi d\eta \\ &\quad + 4p\mu_0^{-1} \varepsilon^{-\frac{q}{p}} \int_{P_{\frac{1}{2}}} |\theta|^p d\mathbf{x} + 4p\mu_0^{-1} \varepsilon \int_{P_{\frac{1}{2}}} |\nabla \theta|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

将上式对 t 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 积分,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_e |\theta|^p de &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \int_D |\theta|^p(\mathbf{x}(t)) |\phi_\xi \times \phi_\eta| d\xi d\eta dt \\ &\quad + 2p\mu_0^{-1} \varepsilon^{-\frac{q}{p}} \int_{P_{\frac{1}{2}}} |\theta|^p d\mathbf{x} + 2p\mu_0^{-1} \varepsilon \int_{P_{\frac{1}{2}}} |\nabla \theta|^p d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

将 (1.4.6) 代入 (1.4.7) 的右端,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_e |\theta|^p de &\leq 4\mu_0^{-1} |\omega|^{-1} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_D |\theta|^p(\mathbf{x}(t)) J(t, \xi, \eta) d\xi d\eta dt \\ &\quad + 2p\mu_0^{-1} \varepsilon^{-\frac{q}{p}} \int_{P_{\frac{1}{2}}} |\theta|^p d\mathbf{x} + 2p\mu_0^{-1} \varepsilon \int_{P_{\frac{1}{2}}} |\nabla \theta|^p d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

(1.4.8) 右端的第一个积分是 $|\theta|^p$ 在旁面三角台 $P_{\frac{1}{2}}$ 的积分. 由假设 (A3),

$$|\omega|^{-1} \leq \alpha_* h_T^{-1}, \quad (1.4.9)$$

其中 $\alpha_* > 0$. 取 $\varepsilon = h_T^{p-1}$, 则 $\varepsilon^{-\frac{q}{p}} = h_T^{-1}$. 因此, 由 (1.4.8), (1.4.9),

$$\int_e |\theta|^p de \leq Ch_T^{-1} \left(\int_{P_{\frac{1}{2}}} |\theta|^p d\mathbf{x} + h_T^p \int_{P_{\frac{1}{2}}} |\nabla \theta|^p d\mathbf{x} \right).$$

引理得证. \square

特别地, 当 $p = 2$ 时, 迹不等式 (1.4.1) 即为

$$\|\theta\|_e^2 \leq Ch_T^{-1} \left(\|\theta\|_T^2 + h_T^2 \|\nabla \theta\|_T^2 \right). \quad (1.4.10)$$

接下来, 建立由多项式函数在子区域上的 L^p 范数估计多项式函数的 L^p 范数的估计. 为此, 我们对 $W^{1,p}$ 中的函数推导一个类似的结论.

引理 1.4.2. 假设凸区域 $K \subset \mathbb{R}^d$, $v \in W^{1,p}(K)$, $p \geq 1$. 那么,

$$\|v\|_{L^p(K)}^p \leq \frac{2|K|}{|S|} \|v\|_{L^p(S)}^p + \left(\frac{2pw_d \delta^{d+1}}{|S|} \right)^p \|\nabla v\|_{L^p(K)}^p, \quad (1.4.11)$$

其中, δ 为 K 的直径, S 为 K 的任意可测子集, $w_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(d/2)}$ 为 \mathbb{R}^d 中单位球的体积.

证明 由于 $C^1(K)$ 在 $W^{1,p}(K)$ 中稠密, 故只需对 $v \in C^1(K)$ 证明 (1.4.11) 即可. 对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$,

$$|v|^p(\mathbf{x}) = |v|^p(\mathbf{y}) - \int_0^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \partial_r(|v|^p(\mathbf{x} + r\omega)) dr,$$

这里, $w = \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}$. 由链式法则以及 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} |v|^p(\mathbf{x}) &= |v|^p(\mathbf{y}) - p \int_0^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} |v|^{p-1} \operatorname{sgn}(v) \partial_r v(\mathbf{x} + r\omega) dr \\ &\leq |v|^p(\mathbf{y}) + p\varepsilon^{-\frac{q}{p}} \int_0^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} |v|^p dr + p\varepsilon \int_0^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} |\partial_r v|^p dr, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

其中 $\epsilon > 0$ 为任意常数. 取

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} |v|^p(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in K, \\ 0, & \mathbf{x} \notin K, \end{cases}$$

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} |\partial_r v|^p(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in K, \\ 0, & \mathbf{x} \notin K. \end{cases}$$

(1.4.12) 可以化简为

$$|v|^p(\mathbf{x}) \leq |v|^p(\mathbf{y}) + p\epsilon^{-\frac{q}{p}} \int_0^\infty V(\mathbf{x} + rw)dr + p\epsilon \int_0^\infty W(\mathbf{x} + rw)dr.$$

将上述不等式对 \mathbf{y} 在 \mathbf{S} 中积分,

$$\begin{aligned} |S||v|^p(\mathbf{x}) &\leq \int_S |v|^p dS \\ &+ p \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leq\delta} \left(\epsilon^{-\frac{q}{p}} \int_0^\infty V(\mathbf{x} + rw)dr + \epsilon \int_0^\infty W(\mathbf{x} + rw)dr \right) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

不难看出,

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leq\delta} \int_0^\infty V(\mathbf{x} + rw)dr d\mathbf{y} &= \int_0^\infty \int_{|w|=1} \int_0^\delta V(\mathbf{x} + rw)\rho^{d-1}d\rho dw dr \\ &= \frac{\delta^d}{d} \int_0^\infty \int_{|w|=1} V(\mathbf{x} + rw)dw dr \\ &= \frac{\delta^d}{d} \int_K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-d} |v|^p(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

类似地,

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leq\delta} \int_0^\infty W(\mathbf{x} + rw)dr d\mathbf{y} = \frac{\delta^d}{d} \int_K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-d} |\partial_r v(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y}. \quad (1.4.15)$$

将 (1.4.14), (1.4.15) 代入 (1.4.13),

$$\begin{aligned} & |S||v|^p(\mathbf{x}) \\ & \leq \int_S |v|^p dS + \frac{p\delta^d}{d} \left(\epsilon^{-\frac{q}{p}} \int_K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-d} |v|^p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \epsilon \int_K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-d} |\nabla v(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right). \end{aligned}$$

注意到下式成立:

$$\int_K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-d} d\mathbf{x} \leq \delta S_{d-1},$$

其中 S_{d-1} 是 \mathbb{R}^d 中单位球的表面积. \mathbb{R}^d 中单位球的体积 w_d 与 S_{d-1} 的关系为

$$w_d = \frac{S_{d-1}}{d}.$$

将上式两端对 \mathbf{x} 在 K 积分,

$$|S| \int_K |v|^p dK \leq |K| \int_S |v|^p dS + pw_d \delta^{d+1} \left(\epsilon^{-\frac{q}{p}} \int_K |v|^p dK + \epsilon \int_K |\nabla v|^p dK \right),$$

取 $\epsilon = \left(\frac{2pw_d \delta^{d+1}}{|S|} \right)^{p-1}$, (1.4.11) 得证. \square

考虑引理 1.4.2 中凸区域 K 为形状正则的 d -单纯形的情况. 记 h_K 为 K 的直径. 由形状正则性假设知,

1. K 的测度与 h_K^d 成正比,
2. 存在一个直径与 h_K 成正比的内切球 $B_K \subset K$.

令 S 为 K 内部的一个球, 其半径 $r_S \geq \varsigma_* h_K$. 那么, 存在常数 κ_* , 使得

$$|K| \leq \kappa_* |S|. \tag{1.4.16}$$

由 (1.4.16), $\tau_* |S| \geq h_K^d$, $\delta = h_K$, (1.4.11) 化简为

$$\|v\|_{L^p(K)}^p \leq 2\kappa_* \|v\|_{L^p(S)}^p + (2p\tau_* h_K w_d)^p \|\nabla v\|_{L^p(K)}^p. \tag{1.4.17}$$

为记号的简便, 将 (1.4.17) 写为

$$\|v\|_{K,p}^p \leq a_0 \|v\|_{S,p}^p + a_1 h_K^p \|\nabla v\|_{K,p}^p. \quad (1.4.18)$$

如果 v 无穷次光滑, 反复使用 (1.4.18),

$$\|v\|_{K,p}^p \leq \sum_{j=0}^n a_j h_K^{jp} \|\nabla^j v\|_{S,p}^p + a_{n+1} h_K^{pn+p} \|\nabla^{n+1} v\|_{K,p}^p. \quad (1.4.19)$$

特别地, 如果 v 是 n 次多项式,

$$\|v\|_{K,p}^p \leq \sum_{j=0}^n a_j h_K^{jp} \|\nabla^j v\|_{S,p}^p. \quad (1.4.20)$$

由逆不等式 (1.3.1),

$$\|\nabla^j v\|_{S,p} \leq C h_K^{-j} \|v\|_{S,p}.$$

将上式代入 (1.4.20),

$$\|v\|_{K,p}^p \leq C \|v\|_{S,p}^p. \quad (1.4.21)$$

引理得证. \square

引理1.4.3. (区域逆不等式) 假设直径 h_K 的形状正则的 d -单纯形 $K \subset \mathbb{R}^d$, S 为 K 中的一个球, 其直径 r_S 与 h_K 成正比, 即 $r_S \geq \varsigma_* h_K$, 其中 $\varsigma_* > 0$ 固定. 那么, 对任意次数不超过 n 的多项式 v , 存在与 ς_* 和 n 有关的常数 C , 使得

$$\|v\|_{L^p(K)} \leq C \|v\|_{L^p(S)}. \quad (1.4.22)$$

标准的逆不等式对满足定义 1.4.1 中假设 (A1)-(A4) 的有限元剖分上的分片多项式也是成立的.

引理1.4.4. (逆不等式) 假设 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 的二维多边形或三维多面体剖分, 且满足定义 1.4.1 中正则性假设 (A1)-(A4), $p \geq 1$. 那么, 对任意的 n 次分片多项

式 φ , 存在与 n 有关的常数 C , 使得

$$\|\nabla\varphi\|_{T,p} \leq Ch_T^{-1}\|\varphi\|_{T,p}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (1.4.23)$$

证明 对任意的 $T \in \mathcal{T}_h$, 令 $S(T)$ 为形状正则的外接单纯形. 由标准的逆不等式 (1.3.1),

$$\|\nabla\varphi\|_{T,p} \leq \|\nabla\varphi\|_{S(T),p} \leq Ch_T^{-1}\|\varphi\|_{S(T),p}.$$

由估计 (1.4.22), 取 $K = S(T)$, 其中 S 为 T 内部直径与 h_T 成比例的球,

$$\|\nabla\varphi\|_{T,p} \leq Ch_T^{-1}\|\varphi\|_{S,p} \leq Ch_T^{-1}\|\varphi\|_{T,p}.$$

引理得证. \square

如果 ξ 是 T 上的一个多项式, 由逆不等式 (1.4.23) 知, 迹不等式 (1.4.10) 即为

$$\|\xi\|_e^2 \leq Ch_T^{-1}\|\xi\|_T^2. \quad (1.4.24)$$

引理1.4.5. 假设 \mathcal{T}_h 为区域 Ω 的二维多边形或三维多面体有限元剖分, 且满足定义 1.4.1 中正则性假设 (A1)-(A4), $p \geq r \geq 1$. 那么, 对任意 n 次分片多项式 φ , 存在与 n 有关的常数 C , 使得

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq Ch^{\frac{d}{p}-\frac{d}{r}}\|\varphi\|_{L^r(\Omega)}. \quad (1.4.25)$$

证明 对任意的 $T \in \mathcal{T}_h$, 令 $S(T)$ 为形状正则的外接单纯形. 由标准的逆不等式 (1.3.1),

$$\|\varphi\|_{T,p} \leq \|\varphi\|_{S(T),p} \leq Ch_T^{\frac{d}{p}-\frac{d}{r}}\|\varphi\|_{S(T),r}.$$

由估计 (1.4.22), 取 $K = S(T)$, 其中 S 为 T 内部的直径与 h_T 成比例的球,

$$\|\varphi\|_{T,p} \leq Ch_T^{\frac{d}{p}-\frac{d}{r}}\|\varphi\|_{S,r} \leq Ch_T^{\frac{d}{p}-\frac{d}{r}}\|\varphi\|_{T,r}. \quad (1.4.26)$$

由 (1.4.26),

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\varphi\|_{T,p}^p \leq Ch^{d-\frac{pd}{r}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\varphi\|_{T,r}^p.$$

由 $\frac{r}{p} \leq 1$, 以及上述不等式,

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^r \leq Ch^{\frac{rd}{p}-d} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\varphi\|_{T,r}^p \right)^{\frac{r}{p}} \leq Ch^{\frac{rd}{p}-d} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\varphi\|_{T,r}^r,$$

引理得证. \square

引理1.4.6. 假设 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 上满足定义 1.4.1 中正则性假设 (A1)-(A4) 的正则剖分. 对任意的 $T \in \mathcal{T}_h$, 记 Q_k 为 $L^2(T)$ 到 $P_k(T)$ 的 L^2 投影. 存在常数 C , 使得

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q - Q_k q\|_T^2 \leq Ch^{2(s+1)} \|q\|_{s+1}^2, \quad 0 \leq s \leq k, \quad (1.4.27)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(q - Q_k q)\|_T^2 \leq Ch^{2s} \|q\|_{s+1}^2, \quad 0 \leq s \leq k. \quad (1.4.28)$$

证明 令 $S(T)$ 为 T 的外接单纯形, 将 q 光滑延拓到 $S(T)$. 令 $\tilde{Q}_k q$ 为 q 到 $S(T)$ 的投影,

$$\|q - Q_k q\|_T \leq \|q - \tilde{Q}_k q\|_T \leq \|q - \tilde{Q}_k q\|_{S(T)} \leq Ch_T^{s+1} \|q\|_{s+1, S(T)},$$

由上述估计,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q - Q_k q\|_T^2 \leq Ch^{2(s+1)} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q\|_{s+1, S(T)}^2. \quad (1.4.29)$$

由正则性假设 (A4) 知: 外接单纯形集合 $\{S(T) : T \in \mathcal{T}_h\}$ 重叠数固定且比较小,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q\|_{s+1, S(T)}^2 \leq C \|q\|_{s+1}^2.$$

将上述不等式代入 (1.4.29), (1.4.27) 得证.

下证 (1.4.28), 由三角不等式, 逆不等式 (1.4.23),

$$\begin{aligned} \|\nabla(q - Q_k q)\|_T &\leq \|\nabla(q - \tilde{Q}_k q)\|_{S(T)} + \|\nabla(\tilde{Q}_k q - Q_k q)\|_{S(T)} \\ &\leq Ch_T^s \|q\|_{s+1, S(T)} + Ch_T^{-1} \|\tilde{Q}_k q - Q_k q\|_{S(T)}. \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

由正则性假设 (A3) 知, 存在直径与 h_T 成正比的球 $B \subset T$. 由引理 1.4.3,

$$\begin{aligned} \|\tilde{Q}_k q - Q_k q\|_{S(T)} &\leq \|\tilde{Q}_k q - Q_k q\|_B \\ &\leq \|\tilde{Q}_k q - Q_k q\|_T \\ &\leq \|q - \tilde{Q}_k q\|_T + \|q - Q_k q\|_T \\ &\leq Ch_T^{s+1} \|q\|_{s+1, S(T)}. \end{aligned}$$

将上述估计代入 (1.4.30),

$$\|\nabla(q - Q_k q)\|_T \leq Ch_T^s \|q\|_{s+1, S(T)}.$$

对 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和, (1.4.28) 得证. 引理得证. \square

第 2 章 重调和方程的弱有限元方法

本章提出了求解重调和方程一种新的高效的数值算法-弱 Galerkin (WG) 有限元方法, 特别引入了定义在多边形或多面体有限元剖分上的间断函数的弱 Hessian 和离散弱 Hessian. WG 有限元方法的矩阵具有对称正定性, 且不依赖任何参数的选取. 本章建立了 H^2 等价范数意义下, WG 有限元方法的最优阶误差估计; 以及在 L^2 范数意义下, WG 有限元方法的最优阶误差估计 (最低阶元, 即分片二次元, 除外).

2.1 重调和方程简介

重调和方程起源于弹性薄板理论. 本节的详细内容可参考文献 [58, 59]. 所谓弹性薄板指的是其厚度远小于其他两尺寸的弹性体. 假定板厚度为常数, 板的材料各向同性. 称平分板厚度的平面为中间面. 由于横向弯曲变形中间面形成的曲面称为板的弹性曲面.

假定板上的荷重与体积力作用在板的中间面. 荷重分解为两种分量: (1) 引起板的平面应力状态的作用在中间面内的分量; (2) 引起板的横向弯曲的垂直于中间面的分量.

目前为止, 研究者们很难计算满足所有弹性理论微分方程的板的精确解, 他们只是对极个别最简单的情况给出了精确解的公式. 因此, 建立计算板的近似理论, 使我们对实际中的问题获得足够精确的解答, 是亟待解决的问题. 板的古典计算理论基于 Love-Kirchhoff 假设:

- (1) 板材料线性弹性且遵循胡克定律.
- (2) 板材料齐次且各向同性, 其弹性形变由 Young's 模数 E 和 Poisson 比 ν 描述.
- (3) 板厚度远小于其长度和宽度. 垂直于中间面的正应力, 与横截面内的应力相比可以忽略不计.
- (4) 变形前位于与板的中间面相垂直的任意直线上所有的点, 在板变形后

仍位于与板的弹性曲面正交的直线上(平面法线假设).

(5) 板的挠度 w 远小于板的厚度. 变形后板的曲率由挠度 w 的二阶导数近似.

(6) 板的中间面无应力, 也即作用在板上的薄膜应力可以忽略不计.

(7) 作用在板的平面内的荷重所引起的应力, 沿板的厚度均匀分布.

在上述 Love-Kirchhoff 假设下, 弹性方程组可以简化为一个描述板弯问题的微分方程.

由假设 4, 中间面的挠度 $w(x, y, 0)$ 和位移 $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ 之间的简单关系为

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}$$

由应变分量的定义,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

也即应变分量随板的厚度线性变化, 在中间面取 0. 由胡克定律,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}), \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{xy},$$

我们得到应力分量

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

和应变分量一样, 应力分量随板厚度线性变化. 如果已知板的挠度, 可以计算出大部分相关的应力和应变分量. 需要特别指出的是目前为止我们还不能计算出该点的垂直剪应力, 垂直剪应力的的重要性在于能够确保板的垂直平衡.

为简化分析, 我们用相应的合力代替应力. 特别地, 定义

$$\begin{aligned}m_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}z dz, & m_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}z dz, \\ m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}z dz, & m_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yx}z dz, \\ q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, & q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz.\end{aligned}$$

由定义知, m_{xx} , m_{yy} 表示横截面内每单位长度的弯矩; m_{xy} , m_{yx} 表示横截面内每单位长度的扭矩; q_x , q_y 表示横截面内每单位长度的横向力.

由 (2.1.1),

$$m_{xx} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = -\frac{EI}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

其中 I 表示板每单位长度的惯性矩. 为方便起见, 定义板的弯曲刚度

$$K = \frac{EI}{1 - \nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

从而,

$$m_{xx} = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_{yy} = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -(1 - \nu)K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

由于垂直剪应力没有表示为板挠度的函数, 故还不能计算出横向力. 考虑无穷小板线段 $h dx dy$ 的旋转平衡. y 轴附近旋转平衡条件为

$$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dx dy - q_x dy dx + \frac{1}{2} p dx dy dx = 0,$$

或

$$q_x = \frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}.$$

这里 p 表示作用在板上的力的密度函数. 同理, x 轴附近旋转平衡条件为

$$q_y = \frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}.$$

将弯矩和扭矩代入上式, 在板的弯曲刚度为常数的条件下,

$$\begin{aligned} q_x &= -K \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ &= -K \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ &= -K \frac{\partial \Delta w}{\partial x}. \end{aligned}$$

类似可得,

$$q_y = -K \frac{\partial \Delta w}{\partial y}.$$

到目前为止, 我们还没有要求垂直平衡. 我们继续考虑无穷小板线段 $h dx dy$,

$$q_x dy - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + q_y dx - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx - p dx dy = 0,$$

化简得,

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p.$$

最后, 将横向力表示为板挠度的函数, 得到重调和方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \frac{p}{K}.$$

求解上述重调和方程得到板挠度. 一旦已知板挠度, 我们可以计算弯矩、扭矩和应力. 为求解此重调和方程, 我们还需要已知边界条件. 接下来, 我们来推导适当的边界条件.

考虑板边界上的一个点 $x = a$. 在此点, 计算三个量 m_{xx} , m_{xy} 和 q_x . 这些量必须和弯矩、扭矩以及横向力平衡. 但是, 我们遇到了一个问题: 微分方程是含两个变量的四阶方程, 即有 8 个积分常数, 或者说板的每条边含 2 个积分常数. 换句话说, 我们仅满足 2 个条件. 出现此问题的原因在于理论推导时忽略了由垂直剪应力引起的形变. Kirchhoff 提出 Ersatz 横向力来解决此问题. Ersatz 力等价于板边的扭矩. 接下来推导 Ersatz 力的表达式.

考虑在板边 $x = a$ 上相距 dy 的 3 个点. 在这 3 个点, 扭矩分别为

$$\left(m_{xy} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dy, \quad m_{xy} dy, \quad \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dy.$$

即在这三个点,

$$m_{xy} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy, \quad m_{xy}, \quad m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy.$$

力 m_{xy} 互相消去后, 得到力 $\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy$. 如果此力沿着板边均匀分布, 则可得由扭矩引起的分布横向力, 称之为 **Ersatz** 力. 将 **Ersatz** 力代替分布的扭矩,

$$\begin{aligned}\bar{q}_x &= q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \\ &= -K \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - (1 - \nu) K \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ &= -K \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\ \bar{q}_y &= q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \\ &= -K \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right].\end{aligned}$$

考虑到由扭矩产生的 **Ersatz** 力, 如果外横向力和扭矩作用于板边, 那么需要将其简化为一个等价的分布横向力.

我们给出常用的板边条件.

1. 边 $x = a$ 为自由边且无支撑.

$$\begin{aligned}m_{xx} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ \bar{q}_x = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0.\end{aligned}$$

2. 边 $x = a$ 为自由边且简单支撑.

$$\begin{aligned}w = 0, \\ m_{xx} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.\end{aligned}$$

3. 边 $x = a$ 为铰接边.

$$w = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

沿边 $x = a$,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

即沿边 $x = a$ 没有扭矩, 故横向力等于反应力 (没有 Ersatz 力). 当薄板的边界是曲边时, 相应的铰接边边界条件即为

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

此边界条件正是本文所探讨的问题之一.

2.2 常用数值方法

假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 是具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$ 的开有界区域. 函数 f, g, g_n 为区域 Ω 或边界 $\partial\Omega$ 上给定的函数. 考虑 Dirichlet 和 Neumann 边界条件的重调和方程: 求 $u = u(\mathbf{x})$, 满足

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f, \quad \text{在 } \Omega, \\ u &= g, \quad \text{在 } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= g_n, \quad \text{在 } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

目前为止, 求解重调和方程 (2.2.1) 的常用数值方法包括协调有限元方法, 非协调有限元方法, 混合有限元方法和间断 Galerkin (DG) 有限元方法. 我们将简单介绍以上各种数值求解方法, 详细内容可参考 [8, 15, 45, 54].

首先介绍求解重调和方程的协调有限元方法. 通常我们将重调和方程 (2.2.1) 表述为基于 Sobolev 空间 $H^2(\Omega)$ 的一种变分形式, 相应求解四阶问题的有限元空间是 $H^2(\Omega)$ 的子空间, 这类有限元方法被称为 H^2 协调元方法. H^2 协调元方法要求给定剖分上的分片多项式 C^1 连续, 即不仅要求分片多项式在单元与单元之间的公共边连续, 而且要求其法向导数在单元与单元之间的

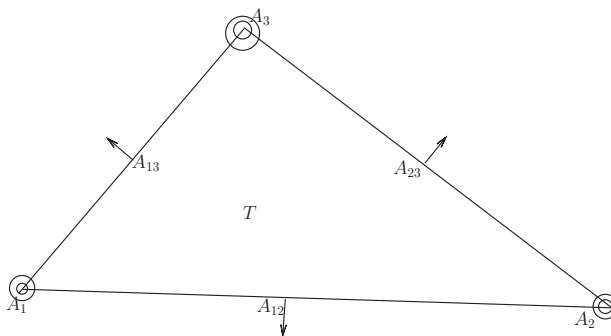


图 2-1 Argyris 三角形元.

公共边连续. 在有限元方法中, 常用的 C^1 元包括 Argyris 三角形元, Bell 三角形元等. Argyris 三角形元构造如下 (见图 2-1): 设 T 是三角形单元, 顶点 A_i ($1 \leq i \leq 3$), 三边中点 A_{ij} ($1 \leq i < j \leq 3$). 求 $p(x, y) \in P_5(T)$, 满足

$$\partial^\alpha p(A_i) = u_{\alpha,i}, \quad |\alpha| \leq 2, 1 \leq i \leq 3;$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(A_{ij}) = u_{\mathbf{n},ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$

其中 \mathbf{n} 是 ∂T 的单位外法方向.

在 Argyris 三角形元中去掉三边中点法向导数的插值数据, 并增加约束条件:

$$\left. \frac{\partial p(x, y)}{\partial \mathbf{n}} \right|_e \in P_3(e), \quad \forall e \subset \partial T,$$

这样构造的元称为 Bell 三角形元.

注2.2.1. 由于 C^1 元构造复杂且自由度比较多, 导致求解规模很大, 因此实际计算中, 很少使用构造 C^1 元的协调有限元方法求解四阶问题.

求解四阶问题的有限元空间不是 $H^2(\Omega)$ 的子空间, 称为非协调有限元方法. 常见的非协调元是 Morley 三角形元, 构造如下 (见图 2-2):

- (1) T 为三角形单元, 顶点 A_i ($1 \leq i \leq 3$), 三边中点 A_{ij} ($1 \leq i < j \leq 3$);
- (2) $\mathcal{P}_T = P_2(T)$;

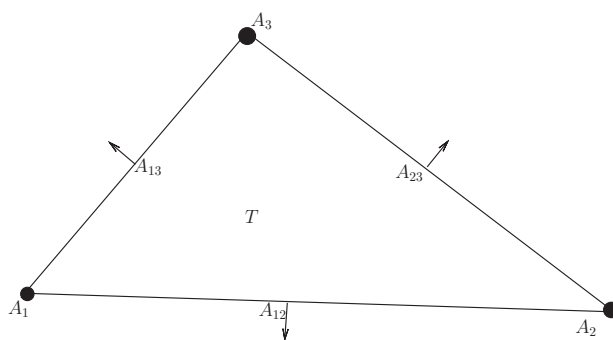


图 2-2 Morley 三角形元.

(3) 在顶点取给定值, 在三边中点取给定的法向导数值.

求解重调和方程的混合有限元方法的主要思想是将四阶问题化简为两个二阶问题的方程组以避免使用 C^1 元求解. 求解重调和方程的混合有限元方法可参考 [1, 19, 22, 30, 37].

我们以齐次 Dirichlet 和 Neumann 边界条件的重调和方程为例来说明混合有限元方法的基本思想. 考虑齐次 Dirichlet 和 Neumann 边界条件的重调和方程: 求 $u = u(\mathbf{x})$, 满足

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f(x), & \text{在 } \Omega, \\ u &= 0, & \text{在 } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0, & \text{在 } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界凸多边形区域. 若 $f \in H^{-2}(\Omega)$, 则 (2.2.2) 存在唯一解 $u \in H_0^2(\Omega)$; 若 $f \in H^{-1}(\Omega)$, 则 $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, 且存在正常数 C , 使得

$$\|u\|_{3,\Omega} \leq C \|f\|_{-1,\Omega}.$$

我们简单介绍将 (2.2.2) 化为低阶方程常用的三种方法.

(1) Ciarlet-Raviart 方法. 令

$$\varphi + \Delta u = 0,$$

则 (2.2.2) 等价于

$$-\Delta \varphi = f(\mathbf{x}), \quad \text{在 } \Omega,$$

$$\varphi + \Delta u = 0, \quad \text{在 } \Omega,$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega,$$

取

$$H = H^1(\Omega),$$

$$M = H_0^1(\Omega),$$

$$a(\varphi, v) = \int_{\Omega} \varphi v d\mathbf{x},$$

$$b(u, v) = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\mathbf{x},$$

则 (2.2.2) 相应的 Ciarlet-Raviart 变分问题为: 求 $(\varphi, u) \in H \times M$, 使得

$$a(\varphi, v) + b(v, u) = 0, \quad \forall v \in H,$$

$$b(\varphi, \psi) = (f, \psi), \quad \forall \psi \in M,$$

(2) Hermann-Miyoshi 方法. 取

$$H = \{v : v = (v_{ij})_{2 \times 2}, v_{12} = v_{21}, v_{ij} \in H^1(\Omega)\},$$

$$M = H_0^1(\Omega),$$

$$a(\varphi, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \varphi_{ij} v_{ij} d\mathbf{x},$$

$$b(v, u) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\mathbf{x},$$

则 (2.2.2) 相应的 Hermann-Miyoshi 变分问题为: 求 $(\varphi, u) \in H \times M$, 使得

$$a(\varphi, v) + b(v, u) = 0, \quad \forall v \in H,$$

$$b(\varphi, \psi) = - (f, \psi), \quad \forall \psi \in M.$$

(3) Hermann-Johnson 方法.

设 \mathcal{T}_h 为给定的三角剖分, $v = (v_{ij})_{2 \times 2}$, $v_{12} = v_{21}$,

$$M_{\mathbf{n}} = \sum_{i,j=1}^2 v_{ij} n_i n_j, \quad M_{\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}} = \sum_{i,j=1}^2 v_{ij} n_j \tau_i, \quad v_{ij} \in H^1(T),$$

其中 $T \in \mathcal{T}_h$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)'$ 为 ∂T 的单位外法向, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)' = (n_2, -n_1)'$ 为 ∂T 的单位切向. 取

$$H = \{v : v = (v_{ij})_{2 \times 2}, v_{12} = v_{21}, v_{ij}|_T \in H^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, M_n \text{ 在交界线上连续}\},$$

$$\|v\|_H^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^2 \|v\|_{1,T}^2,$$

$$M = W_0^{1,p}(\Omega), \quad p \geq 2,$$

$$a(\varphi, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \varphi_{ij} v_{ij} d\mathbf{x},$$

$$b(u, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \int_T \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x} - \int_{\partial T} M_{\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\tau}} ds \right\},$$

则 (2.2.2) 相应的 Hermann-Johnson 变分问题为: 求 $(\varphi, u) \in H \times M$, 使得

$$a(\varphi, v) + b(v, u) = 0, \quad \forall v \in H,$$

$$b(\varphi, \psi) = - (f, \psi), \quad \forall \psi \in M.$$

关于求解重调和方程的间断 Galerkin (DG) 有限元方法, 文献 [9, 18] 提出了求解重调和方程的 C^0 内罚方法, 文献 [33] 提出了求解重调和方程的 hp 内罚 DG 方法. 为节约篇幅, 有关的 DG 有限元格式就不详细介绍了.

2.3 弱 Hessian 和离散弱 Hessian

重调和问题 (2.2.1) 的变分形式为: 求 $u \in H^2(\Omega)$, 使得 $u|_{\partial\Omega} = g$, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g_n$, 满足

$$(1 - \nu) \int_{\Omega} \nabla^2 u : \nabla^2 v d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \Delta u \Delta v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

这里, $\nabla^2 v$ 表示 v 的 Hessian 张量, ν 是 Poisson 比, 且 $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$. 为简便起见, 考虑 $\nu = 0$ 的情况. 此时, 模型变分形式为

$$\sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij}^2 u, \partial_{ij}^2 v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \quad (2.3.1)$$

其中, ∂_{ij}^2 表示 x_i, x_j 方向的二阶偏导数. 需要指出的是, 本文所建立的理论和方法广泛适用于任意的 Poisson 比 ν .

在重调和问题 (2.2.1) 相应的变分形式 (2.3.1) 中, 涉及到的微分算子为 ∂_{ij}^2 . 因此, 我们首先对一类间断函数定义弱二阶偏导数, 记作 $\partial_{ij,w}^2$. 为进行数值求解, 我们将进一步在多项式空间中引入弱二阶偏导数 $\partial_{ij,w}^2$ 的离散形式, 记作 $\partial_{ij,w,r,T}^2$, 称为离散弱二阶偏导数.

令 T 为任意二维多边形或三维多面体区域, 记边界为 ∂T . 所谓 T 上的弱函数, 指的是函数 $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\}$, 其中 $v_0 \in L^2(T)$, $v_b \in L^2(\partial T)$, $\mathbf{v}_g \in [L^2(\partial T)]^d$. 这里, 第一个和第二个分量 v_0 和 v_b 表示 v 在 T 的内部和边界的值, 第三个分量 $\mathbf{v}_g = (v_{g1}, \dots, v_{gd})' \in \mathbb{R}^d$ 表示 ∇v 在 T 的边界的值. 这里需要特别强调的是 v_b 和 \mathbf{v}_g 未必分别与 v_0 和 ∇v_0 在 ∂T 上的迹相关.

T 上所有弱函数构成的空间记作 $W(T)$, 即

$$W(T) = \{v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} : v_0 \in L^2(T), v_b \in L^2(\partial T), \mathbf{v}_g \in [L^2(\partial T)]^d\}. \quad (2.3.2)$$

如果 $f(x_1, \dots, x_d)$ 的所有二阶偏导数都存在, 则 $f(x_1, \dots, x_d)$ 的 Hessian, 记作 $\nabla^2 f$, 定义为

$$\nabla^2 f = (\partial_{ij}^2 f)_{d \times d},$$

其中 ∂_{ij}^2 表示 x_i 和 x_j 方向的二阶偏导数.

定义 2.3.1. (弱二阶偏导数) 在标准的 L^2 内积下, $L^2(T)$ 的对偶空间为 $L^2(T)$. 类似地, 对任意的 $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in W(T)$, v 的弱二阶偏导数, 记作 $\partial_{ij,w}^2 v$, 定义为 $H^2(T)$ 的对偶空间中的线性函数, 使得对任意的 $\varphi \in H^2(T)$,

$$(\partial_{ij,w}^2 v, \varphi)_T = (v_0, \partial_{ji}^2 \varphi)_T - \langle v_b n_i, \partial_j \varphi \rangle_{\partial T} + \langle v_{g_i}, \varphi n_j \rangle_{\partial T}, \quad (2.3.3)$$

其中 $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)'$ 是 ∂T 的单位外法向.

由此, 对任意的 $v \in W(T)$, v 的弱 Hessian, 记作 $\nabla_{w,T}^2 v$, 定义为

$$\nabla_{w,T}^2 v = (\partial_{ij,w}^2 v)_{d \times d}.$$

从弱二阶偏导数的定义知, 弱二阶偏导数用到了函数在边界上的信息, 而从广义导数的定义知, 由于检验函数属于空间 C_0^∞ , 所以广义导数根本不涉及函数本身在边界上的信息. 与经典的广义二阶偏导数不同的是: 一般地, 当 $i \neq j$ 时, $\partial_{ij,w}^2 v \neq \partial_{ji,w}^2 v$ ($i, j = 1, \dots, d$).

定义包含映射 $i_W : H^2(T) \rightarrow W(T)$, 使得对任意的 $\phi \in H^2(T)$,

$$i_W(\phi) = \{\phi|_T, \phi|_{\partial T}, \nabla \phi|_{\partial T}\},$$

则 $H^2(T)$ 可经包含映射 i_W 嵌入到 $W(T)$. 在包含映射 i_W 下, 对任意的 $\phi \in H^2(T)$, 成立 $\phi = i_W(\phi)$, 故 $H^2(T)$ 可看作 $W(T)$ 的子空间. 同理, 若对任意的 $v \in W(T)$, 存在某个函数 $\phi \in H^2(T)$, 使得 $v = i_W(\phi)$, 则 $v \in H^2(T)$. 不难看出, 对于 $H^2(T)$ 中的函数, 弱二阶偏导数即为经典的二阶偏导数, 也即对任意的 $v \in H^2(T)$, 成立 $\partial_{ij,w}^2 v = \partial_{ij}^2 v$ ($i, j = 1, \dots, d$).

对任意非负整数 r , 记 $P_r(T)$ 为 T 上次数不超过 r 的多项式集合. 为数

值计算, 在 $H^2(T)$ 的对偶空间的多项式子空间 $P_r(T)$ 中引入弱二阶偏导数 $\partial_{ij,w}^2(i, j = 1, \dots, d)$ 的离散形式.

定义 2.3.2. (离散弱二阶偏导数) 对任意的 $v \in W(T)$, v 的离散弱二阶偏导数, 记作 $\partial_{ij,w,r,T}^2 v$, 定义为 $P_r(T)$ 中唯一的多项式, 使得对任意的 $\varphi \in P_r(T)$,

$$(\partial_{ij,w,r,T}^2 v, \varphi)_T = (v_0, \partial_{ji}^2 \varphi)_T - \langle v_b n_i, \partial_j \varphi \rangle_{\partial T} + \langle v_{gi}, \varphi n_j \rangle_{\partial T}. \quad (2.3.4)$$

由此, 对任意的 $v \in W(T)$, v 的离散弱 Hessian 定义为

$$\nabla_{w,r,T}^2 v = (\partial_{ij,w,r,T}^2 v)_{d \times d}.$$

注 2.3.1. 对任意的 $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in W(T)$, 如果 v_0 在 T 上二次可微, 对 (2.3.4) 右端第一项应用分部积分, 成立

$$(\partial_{ij,w,r,T}^2 v, \varphi)_T = (\partial_{ij}^2 v_0, \varphi)_T + \langle (v_0 - v_b) n_i, \partial_j \varphi \rangle_{\partial T} - \langle (\partial_i v_0 - v_{gi}) n_j, \varphi \rangle_{\partial T}, \quad (2.3.5)$$

对任意的 $\varphi \in P_r(T)$.

2.4 弱有限元方法

令 \mathcal{T}_h 为区域 Ω 的二维多边形或三维多面体剖分. 假设 \mathcal{T}_h 为正则剖分, 具体参考定义 1.4.1. 记 \mathcal{E}_h 为 \mathcal{T}_h 中所有边或面构成的集合, $\mathcal{E}_h^0 = \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega$ 为 \mathcal{T}_h 中所有内部边或面构成的集合.

给定整数 $k \geq 2$, 定义离散弱函数空间

$$\begin{aligned} W_k(T) &= \{ \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} : v_0 \in P_k(T), v_b \in P_{k-2}(e), \\ &\quad \mathbf{v}_g \in [P_{k-2}(e)]^d, e \subset \partial T \}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

由此, 定义弱有限元空间

$$V_h = \{ \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} : \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\}|_T \in W_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

弱有限元空间 V_h 的子空间定义为

$$V_h^0 = \{ \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in V_h, v_b|_e = 0, \mathbf{v}_g|_e = \mathbf{0}, e \subset \partial T \cap \partial \Omega \}.$$

对任意的 $v \in V_h$, 由公式 (2.3.3) 可计算弱二阶偏导数 $\partial_{ij,w}^2 v$. 为数值计算, 需引入离散弱二阶偏导数 $\partial_{ij,w,r,T}^2 v$, 即选取适当的多项式来近似弱二阶偏导数 $\partial_{ij,w}^2 v$, 这里比较好的选择之一为 $k-2$ 次多项式. 当 $k \geq 2$ 时, 对任意的 $v \in V_h$ 和任意的 $T \in \mathcal{T}_h$, 由 (2.3.4) 计算离散弱二阶偏导数, 记作 $\partial_{ij,w,k-2}^2 v$, 即

$$(\partial_{ij,w,k-2}^2 v)|_T = \partial_{ij,w,k-2,T}^2 (v|_T).$$

在不引起混淆的情况下, 为简化记号, 在记号 $\partial_{ij,w,k-2}^2$ 中略去下标 $k-2$. 引入记号

$$(\partial_w^2 u, \partial_w^2 v)_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij,w}^2 u, \partial_{ij,w}^2 v)_T, \quad \forall u, v \in V_h.$$

当 $k \geq 2$ 时, 在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$, 记 Q_0 为到 $P_k(T)$ 的 L^2 投影; 在每条边或面 $e \subset \partial T$, 记 Q_b 为到 $P_{k-2}(e)$ 或 $[P_{k-2}(e)]^d$ 的 L^2 投影. 对任意的 $u \in H^2(\Omega)$, 记 $Q_h u$ 为到弱有限元空间 V_h 的投影, 使得在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$,

$$Q_h u = \{Q_0 u, Q_b u, Q_b(\nabla u)\}.$$

对任意的 $w = \{w_0, w_b, \mathbf{w}_g\} \in V_h$, $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in V_h$, 引入稳定项

$$\begin{aligned} s(w, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla w_0) - \mathbf{w}_g, Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g \rangle_{\partial T} \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle Q_b w_0 - w_b, Q_b v_0 - v_b \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

以下给出基于变分形式 (2.3.1) 的重调和方程 (2.2.1) 的 WG 有限元方法.

弱 Galerkin 算法 1. 求 $u_h = \{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\} \in V_h$, 使得在 $\partial \Omega$ 上, $u_b = Q_b g$, $\mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} =$

$Q_b g_n$, $\mathbf{u}_g \cdot \boldsymbol{\tau} = Q_b(\nabla g \cdot \boldsymbol{\tau})$, 且满足

$$(\partial_w^2 u_h, \partial_w^2 v)_h + s(u_h, v) = (f, v_0), \quad \forall v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in V_h^0, \quad (2.4.2)$$

其中, \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ 分别为边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向和单位切向.

我们给出关于弱有限元空间 V_h^0 的一个有用的结论.

引理 2.4.1. 对任意的 $v \in V_h^0$, 定义

$$\|v\| = \left((\partial_w^2 v, \partial_w^2 v)_h + s(v, v) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.4.3)$$

那么, $\|\cdot\|$ 定义了线性空间 V_h^0 中的一个范数.

证明 我们仅需证明 $\|\cdot\|$ 的正定性. 假设对某个 $v \in V_h^0$, $\|v\| = 0$. 由 (2.4.3) 知, 在每个单元 T 上, $\partial_{ij,w}^2 v = 0$; 在 ∂T 上, $Q_b(\nabla v_0) = \mathbf{v}_g$, $Q_b v_0 = v_b$. 对任意的 $\varphi \in P_{k-2}(T)$, 由 $\partial_{ij,w}^2 v = 0$ 及 (2.7.2),

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_{ij,w}^2 v, \varphi)_T \\ &= (\partial_{ij}^2 v_0, \varphi)_T + \langle v_{gi} - Q_b(\partial_i v_0), \varphi \cdot n_j \rangle_{\partial T} + \langle Q_b v_0 - v_b, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\ &= (\varphi, \partial_{ij}^2 v_0)_T, \end{aligned}$$

故在每个单元 T 上, $\partial_{ij}^2 v_0 = 0$ ($i, j = 1, \dots, d$). 因此, 在每个单元 T 上, v_0 为线性函数, 故 ∇v_0 为常数. 由在 ∂T 上 $Q_b(\nabla v_0) = \mathbf{v}_g$ 知, 在 ∂T 上 $\nabla v_0 = \mathbf{v}_g$. 因此, ∇v_0 在 Ω 上连续. 由于在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{v}_g = \mathbf{0}$, 故在 Ω 上 $\nabla v_0 = 0$ 且在每条边或面上 $\mathbf{v}_g = \mathbf{0}$. 因此, v_0 在每个单元 T 为常数. 再由在 ∂T 上 $Q_b v_0 = v_b$ 知 v_0 在 Ω 上连续. 由在 $\partial\Omega$ 上 $v_b = 0$ 知在 Ω 上 $v_0 = 0$. 从而, 在每条边或面上 $v_b = Q_b v_0 = 0$. 引理得证. \square

定理 2.4.1. WG 算法 1 存在唯一解.

证明 假设 $u_h^{(1)}$ 和 $u_h^{(2)}$ 为 WG 算法 1 的两个不同解. 易知 $e_h = u_h^{(1)} - u_h^{(2)} \in$

V_h^0 , 且满足

$$(\partial_w^2 e_h, \partial_w^2 v)_h + s(e_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h^0. \quad (2.4.4)$$

在 (2.4.4) 中, 取 $v = e_h$,

$$(\partial_w^2 e_h, \partial_w^2 e_h)_h + s(e_h, e_h) = 0.$$

由引理 2.4.1, $e_h \equiv 0$, 即 $u_h^{(1)} = u_h^{(2)}$. 定理得证. \square

2.5 L^2 投影及其性质

本节旨在建立 L^2 投影的一些性质, 这些性质在 WG 有限元方法的误差分析中极其重要.

引理 2.5.1. 对任意的 $T \in \mathcal{T}_h$, 令 \mathcal{Q}_h 为到 $P_{k-2}(T)$ 的局部 L^2 投影. Q_h 和 \mathcal{Q}_h 满足如下交换性: 对任意的 $w \in H^2(T)$, 成立

$$\partial_{ij,w}^2(Q_h w) = \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 w), \quad \forall i, j = 1, \dots, d. \quad (2.5.1)$$

证明 对任意的 $w \in H^2(T)$, 由 $\partial_{ij,w}^2$ 的定义以及分部积分, 对任意的 $\varphi \in P_{k-2}(T)$ 和任意的 $i, j = 1, \dots, d$,

$$\begin{aligned} (\partial_{ij,w}^2(Q_h w), \varphi)_T &= (Q_0 w, \partial_{ji}^2 \varphi)_T - \langle Q_b w, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} + \langle Q_b(\partial_i w) \cdot n_j, \varphi \rangle_{\partial T} \\ &= (w, \partial_{ji}^2 \varphi)_T - \langle w, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} + \langle \partial_i w \cdot n_j, \varphi \rangle_{\partial T} \\ &= (\partial_{ij}^2 w, \varphi)_T \\ &= (\mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 w, \varphi)_T. \end{aligned}$$

引理得证. \square

交换性 (2.5.1) 表明光滑函数 L^2 投影的离散弱偏导数是经典偏导数的一个很好的近似. 离散弱偏导数算子的这一性质在算法设计和分析中极其重要.

下面引理给出了投影算子 Q_h 和 \mathcal{Q}_h 的性质.

引理 2.5.2. [34, 52] 假设 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 的一个正则剖分, 满足定义 1.4.1 中的正则性假设 (A1)-(A4). 对任意的 $0 \leq s \leq 2$, $1 \leq m \leq k$, 存在常数 C , 使得

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2s} \|u - Q_0 u\|_{s,T}^2 \leq Ch^{2(m+1)} \|u\|_{m+1}^2, \quad (2.5.2)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^{2s} \|\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u\|_{s,T}^2 \leq Ch^{2(m-1)} \|u\|_{m+1}^2. \quad (2.5.3)$$

由引理 2.5.2, 可证得如下估计.

引理 2.5.3. 令 $1 \leq m \leq k$, $u \in H^{\max\{m+1,4\}}(\Omega)$. 存在常数 C , 使得下述估计成立:

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T \|\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{m-1} \|u\|_{m+1}, \quad (2.5.4)$$

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^3 \|\partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u)\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{m-1} (\|u\|_{m+1} + h\delta_{m,2} \|u\|_4), \quad (2.5.5)$$

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_b(\nabla Q_0 u) - Q_b(\nabla u)\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{m-1} \|u\|_{m+1}, \quad (2.5.6)$$

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_b(Q_0 u) - Q_b u\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{m-1} \|u\|_{m+1}. \quad (2.5.7)$$

证明 为证 (2.5.4), 由迹不等式 (1.4.10) 和估计 (2.5.3),

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T \|\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u\|_{\partial T}^2 \\ & \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \left(\|\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u\|_T^2 + h_T^2 \|\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u\|_{1,T}^2 \right) \\ & \leq Ch^{2m-2} \|u\|_{m+1}^2. \end{aligned}$$

下证 (2.5.5), 由迹不等式 (1.4.10) 和估计 (2.5.3),

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^3 \|\partial_j(\partial_{ij}u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}u)\|_{\partial T}^2 \\
 & \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \left(h_T^2 \|\partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u)\|_T^2 + h_T^4 |\partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u)|_{1,T}^2 \right) \\
 & \leq C h^{2m-2} (\|u\|_{m+1}^2 + h^2 \delta_{m,2} \|u\|_4^2).
 \end{aligned}$$

下证 (2.5.6), 由迹不等式 (1.4.10) 和估计 (2.5.2),

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_b(\nabla Q_0 u) - Q_b(\nabla u)\|_{\partial T}^2 \\
 & \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\nabla Q_0 u - \nabla u\|_{\partial T}^2 \\
 & \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^{-2} \|\nabla Q_0 u - \nabla u\|_T^2 + |\nabla Q_0 u - \nabla u|_{1,T}^2 \right) \\
 & \leq C h^{2m-2} \|u\|_{m+1}^2.
 \end{aligned}$$

最后证明 (2.5.7), 由迹不等式 (1.4.10) 和估计 (2.5.2),

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_b(Q_0 u) - Q_b u\|_{\partial T}^2 \\
 & \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_0 u - u\|_{\partial T}^2 \\
 & \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^{-4} \|Q_0 u - u\|_T^2 + h_T^{-2} \|\nabla(Q_0 u - u)\|_T^2 \right) \\
 & \leq C h^{2m-2} \|u\|_{m+1}^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

定理2.5.1. 假设 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 的一个正则剖分, 满足定义 1.4.1 的形状正则

性假设 (A1)-(A4). 令 $0 \leq m \leq k$. 假设 u 为重调和问题 (2.2.1) 的解, $Q_h u = \{Q_0 u, Q_b u, Q_b(\nabla u)\}$ 为到弱有限元空间 V_h 的投影. 则存在常数 C , 使得

$$\|u - Q_h u\| \leq C h^{m+1} \|u\|_{m+1}.$$

证明 由积分区域的可加性, 以及 $Q_h u$ 的定义,

$$\|u - Q_h u\|^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - Q_h u\|_T^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u - Q_0 u\|_T^2.$$

由引理 1.4.6, 定理得证.

2.6 误差方程

令 u 和 u_h 分别为重调和方程 (2.2.1) 和 WG 算法 (2.4.2) 的解. 记

$$e_h = Q_h u - u_h \tag{2.6.1}$$

为真解 u 的 L^2 投影与 WG 算法 1 的解 u_h 之间的误差, 称为误差函数, 其中 $e_h = \{e_0, e_b, \mathbf{e}_g\}$, $Q_h u - u_h = \{Q_0 u - u_0, Q_b u - u_b, Q_b(\nabla u) - \mathbf{u}_g\}$. 误差函数 e_h 所必须满足的等式称为误差方程. 本节旨在推导 WG 算法 1 的误差方程.

引理 2.6.1. (2.6.1) 定义的误差函数 e_h 是 V_h^0 中的函数, 且满足

$$(\partial_w^2 e_h, \partial_w^2 v)_h + s(e_h, v) = \phi_u(v), \quad \forall v \in V_h^0, \tag{2.6.2}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 \phi_u(v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\
 &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T} \\
 &\quad + s(\mathcal{Q}_h u, v).
 \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

证明 在 (2.7.1) 中, 取 $\varphi = \partial_{ij,w}^2 \mathcal{Q}_h u$. 由引理 2.5.1,

$$\begin{aligned}
 (\partial_{ij}^2 v, \partial_{ij,w}^2 \mathcal{Q}_h u)_T &= (\partial_{ij}^2 v_0, \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u))_T + \langle v_0 - v_b, \partial_j(\mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u)) \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\
 &\quad - \langle (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j, \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u \rangle_{\partial T} \\
 &= (\partial_{ij}^2 v_0, \partial_{ij}^2 u)_T + \langle v_0 - v_b, \partial_j(\mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u)) \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\
 &\quad - \langle (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j, \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u \rangle_{\partial T},
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 (\partial_{ij}^2 v_0, \partial_{ij}^2 u)_T &= (\partial_{ij,w}^2 \mathcal{Q}_h u, \partial_{ij,w}^2 v)_T - \langle v_0 - v_b, \partial_j(\mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u)) \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\
 &\quad + \langle (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j, \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u \rangle_{\partial T}.
 \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

这里, 我们要特别指出的是: 对任意的 $v \in V_h^0$, $u \in H^r(\Omega)$ ($r > 3$), (2.6.4) 都是成立的. 由分部积分,

$$(\partial_{ij}^2 u, \partial_{ij}^2 v_0)_T = ((\partial_{ij}^2)^2 u, v_0)_T + \langle \partial_{ij}^2 u, \partial_i v_0 \cdot n_j \rangle_{\partial T} - \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 \rangle_{\partial T}.$$

对所有 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和, 由 $(\Delta^2 u, v_0) = (f, v_0)$, 以及 v_{gi}, v_b 在 $\partial\Omega$ 上为 0,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij}^2 u, \partial_{ij}^2 v_0)_T &= (f, v_0) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u, (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T}, \end{aligned}$$

再由 (2.6.4),

$$\begin{aligned} (\partial_w^2 Q_h u, \partial_w^2 v)_h &= (f, v_0) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - Q_h(\partial_{ij}^2 u), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 u - Q_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

在上述方程的两边加上 $s(Q_h u, v)$,

$$\begin{aligned} &(\partial_w^2 Q_h u, \partial_w^2 v)_h + s(Q_h u, v) \\ &= (f, v_0) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - Q_h(\partial_{ij}^2 u), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 u - Q_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T} + s(Q_h u, v). \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

(2.6.5) 减去 (2.4.2),

$$\begin{aligned} &(\partial_w^2 e_h, \partial_w^2 v)_h + s(e_h, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - Q_h(\partial_{ij}^2 u), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 u - Q_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T} + s(Q_h u, v), \end{aligned}$$

引理得证. \square

2.7 技术引理

本节旨在建立 **WG 算法 1** 的误差估计中用到的一些等式和不等式.

引理 2.7.1. 对任意的 $\varphi \in P_{k-2}(T)$, 成立

$$(\partial_{ij,w}^2 v, \varphi)_T = (\partial_{ij}^2 v_0, \varphi)_T + \langle v_0 - v_b, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} - \langle \partial_i v_0 - v_{gi}, \varphi n_j \rangle_{\partial T}. \quad (2.7.1)$$

从而,

$$(\partial_{ij,w}^2 v, \varphi)_T = (\partial_{ij}^2 v_0, \varphi)_T + \langle Q_b v_0 - v_b, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} - \langle Q_b(\partial_i v_0) - v_{gi}, \varphi n_j \rangle_{\partial T}. \quad (2.7.2)$$

证明 由 (2.3.4) 以及分部积分,

$$\begin{aligned} (\partial_{ij,w}^2 v, \varphi)_T &= (v_0, \partial_{ji}^2 \varphi)_T + \langle v_{gi} \cdot n_j, \varphi \rangle_{\partial T} - \langle v_b, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\ &= (\partial_{ij}^2 v_0, \varphi)_T - \langle \partial_i v_0, \varphi \cdot n_j \rangle_{\partial T} + \langle v_0, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\ &\quad + \langle v_{gi} \cdot n_j, \varphi \rangle_{\partial T} - \langle v_b, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\ &= (\partial_{ij}^2 v_0, \varphi)_T + \langle v_0 - v_b, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} - \langle \partial_i v_0 - v_{gi}, \varphi n_j \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

引理得证. \square

引理 2.7.2. 假设 e_h 是弱有限元空间 V_h^0 中的函数. 存在常数 C , 使得

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |e_0|_{2,T}^2 \leq C \| \| e_h \| \|^2, \quad (2.7.3)$$

其中, 由定义 (2.4.3),

$$\begin{aligned} \|e_h\|^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij,w}^2 e_h, \partial_{ij,w}^2 e_h)_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle Q_b e_0 - e_b, Q_b e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla e_0) - \mathbf{e}_g, Q_b(\nabla e_0) - \mathbf{e}_g \rangle_{\partial T}. \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

证明 在 (2.7.2) 中取 $v = e_h$, $\varphi = \partial_{ij}^2 e_0$,

$$\begin{aligned} (\partial_{ij,w}^2 e_h, \partial_{ij}^2 e_0)_T &= (\partial_{ij}^2 e_0, \partial_{ij}^2 e_0)_T - \langle Q_b(\partial_i e_0) - e_{gi}, \partial_{ij}^2 e_0 \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\ &\quad + \langle Q_b e_0 - e_b, \partial_j(\partial_{ij}^2 e_0) \cdot n_i \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} (\partial_{ij}^2 e_0, \partial_{ij}^2 e_0)_T &= (\partial_{ij,w}^2 e_h, \partial_{ij}^2 e_0)_T + \langle Q_b(\partial_i e_0) - e_{gi}, \partial_{ij}^2 e_0 \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\ &\quad - \langle Q_b e_0 - e_b, \partial_j(\partial_{ij}^2 e_0) \cdot n_i \rangle_{\partial T}. \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

由 (2.7.5), Cauchy-Schwarz 不等式, 逆不等式 (1.4.23) 以及迹不等式 (1.4.24),

$$\begin{aligned} (\partial_{ij}^2 e_0, \partial_{ij}^2 e_0)_T &\leq \|\partial_{ij,w}^2 e_h\|_T \|\partial_{ij}^2 e_0\|_T + \|Q_b(\partial_i e_0) - e_{gi}\|_{\partial T} \|\partial_{ij}^2 e_0\|_{\partial T} \\ &\quad + \|Q_b e_0 - e_b\|_{\partial T} \|\partial_j(\partial_{ij}^2 e_0)\|_{\partial T} \\ &\leq \|\partial_{ij,w}^2 e_h\|_T \|\partial_{ij}^2 e_0\|_T + Ch_T^{-\frac{1}{2}} \|Q_b(\partial_i e_0) - e_{gi}\|_{\partial T} \|\partial_{ij}^2 e_0\|_T \\ &\quad + Ch_T^{-\frac{3}{2}} \|Q_b e_0 - e_b\|_{\partial T} \|\partial_{ij}^2 e_0\|_T, \end{aligned}$$

从而,

$$\|\partial_{ij}^2 e_0\|_T^2 \leq \|\partial_{ij,w}^2 e_h\|_T^2 + Ch_T^{-1} \|Q_b(\partial_i e_0) - e_{gi}\|_{\partial T}^2 + Ch_T^{-3} \|Q_b e_0 - e_b\|_{\partial T}^2.$$

对 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和, 引理得证. \square

引理2.7.3. 假设 e_h 是弱有限元空间 V_h^0 中的函数. 令 $k \geq 3$. 存在常数 C , 使得

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|e_h\|. \quad (2.7.6)$$

证明 由三角不等式,

$$\begin{aligned} h_T^{-3} \|e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 &\leq 2h_T^{-3} \left(\|e_0 - Q_b e_0\|_{\partial T}^2 + \|Q_b e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 \right) \\ &\leq 2h_T^{-3} (Ch_T^2 |e_0|_{2, \partial T})^2 + 2h_T^{-3} \|Q_b e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 \\ &\leq 2Ch_T |e_0|_{2, \partial T}^2 + 2h_T^{-3} \|Q_b e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 \\ &\leq 2C |e_0|_{2, T}^2 + 2h_T^{-3} \|Q_b e_0 - e_b\|_{\partial T}^2. \end{aligned}$$

再由 (2.7.3), 引理得证. \square

引理2.7.4. (Poincaré 不等式) 假设 e_h 是弱有限元空间 V_h 中的函数且 $e_b = 0$. 存在常数 C , 使得

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|e_0\|_T^2 \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla e_0\|_T^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 \right). \quad (2.7.7)$$

证明 考虑 Laplace 方程

$$-\Delta \phi = e_0, \quad \text{在 } \Omega,$$

$$\phi = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega.$$

假设 Laplace 方程的解 ϕ 充分正则, 亦满足正则性假设

$$\|\phi\|_2^2 \leq C \|e_0\|^2. \quad (2.7.8)$$

上述正则性假设总可以满足, 否则可将 Ω 延拓到 $\tilde{\Omega}$, e_0 零延拓到 $\tilde{\Omega}$, 使得在 $\tilde{\Omega}$ 上满足正则性假设 (2.7.8).

令 $\mathbf{w} = -\nabla\phi$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (e_0, e_0)_T &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (e_0, \nabla \cdot \mathbf{w})_T \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle e_0, \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{w}, \nabla e_0)_T \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle (e_0 - e_b), \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{w}, \nabla e_0)_T \\
 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{w}\|_T \|\nabla e_0\|_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{w}\|_{\partial T} \|e_0 - e_b\|_{\partial T}.
 \end{aligned}$$

由迹不等式 (1.4.10),

$$\|\mathbf{w}\|_{\partial T}^2 \leq C(h_T^{-1} \|\mathbf{w}\|_T + h_T \|\nabla \mathbf{w}\|_T) \leq Ch_T^{-1} \|\mathbf{w}\|_{1,T}^2.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和正则性假设 (2.7.8),

$$\begin{aligned}
 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (e_0, e_0)_T &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{w}\|_{1,T} \|\nabla e_0\|_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} Ch_T^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{w}\|_{1,T} \|e_0 - e_b\|_{\partial T} \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla e_0\|_T^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_2 \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla e_0\|_T^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|e_0\|.
 \end{aligned}$$

引理得证. \square

下面引理给出了 V_h^0 中有限元函数的 Poincaré 不等式.

引理2.7.5. 假设 e_h 是弱有限元空间 V_h^0 中的函数. 存在常数 C , 使得

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla e_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|e_h\|. \quad (2.7.9)$$

证明 由 $e_h \in V_h^0$ 知, $\mathbf{e}_g = \mathbf{0}$. (2.7.7) 中, 将 e_0 替换为 ∇e_0 ,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla e_0\|_T^2 \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |e_0|_{2,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\nabla e_0 - \mathbf{e}_g\|_{\partial T}^2 \right). \quad (2.7.10)$$

对于 (2.7.10) 右端第二项,

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\nabla e_0 - \mathbf{e}_g\|_{\partial T}^2 \\ & \leq 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\nabla e_0 - Q_b(\nabla e_0)\|_{\partial T}^2 + 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_b(\nabla e_0) - \mathbf{e}_g\|_{\partial T}^2. \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

将 (2.7.11) 代入 (2.7.10), 再由 (2.7.3),

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla e_0\|_T^2 \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} |e_0|_{2,T}^2 + C \|e_h\|^2 \leq C \|e_h\|^2.$$

引理得证. \square

引理2.7.6. 令 $k = 2$. 假设重调和方程 (2.2.1) 的真解 u 充分正则, 使得 $u \in H^4(\Omega)$. 存在常数 C , 使得

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - Q_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \right| \leq Ch \|u\|_4 \|e_h\|. \quad (2.7.12)$$

证明 由于 Q_h 是到 $P_0(T)$ 的 L^2 投影,

$$\begin{aligned} & \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - Q_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \\ & = \langle \partial_j \partial_{ij}^2 u \cdot n_i, e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \partial_j \partial_{ij}^2 u \cdot n_i, e_0 - Q_b e_0 \rangle_{\partial T} + \langle \partial_j \partial_{ij}^2 u \cdot n_i, Q_b e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \\
 &= \langle (I - Q_b) \partial_j \partial_{ij}^2 u \cdot n_i, e_0 - Q_b e_0 \rangle_{\partial T} + \langle \partial_j \partial_{ij}^2 u \cdot n_i, Q_b e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \\
 &= J_1 + J_2.
 \end{aligned}$$

对于第二项 J_2 , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), (2.7.4),

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j \partial_{ij}^2 u \cdot n_i, Q_b e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^3 \|\partial_j \partial_{ij}^2 u\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_0 e_0 - e_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^3 (h_T |u|_{4,T}^2 + h_T^{-1} |u|_{3,T}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \|e_h\| \\
 &\leq Ch (\|u\|_3 + h \|u\|_4) \|e_h\|.
 \end{aligned}$$

对于第一项 J_1 , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), (1.4.24), 以及引理 2.7.5,

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle (I - Q_b) \partial_j \partial_{ij}^2 u \cdot n_i, e_0 - Q_b e_0 \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \|(I - Q_b) \partial_j \partial_{ij}^2 u\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|e_0 - Q_b e_0\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T |u|_{4,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T |e_0|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch \|u\|_4 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |e_0|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\leq Ch\|u\|_4\|e_h\|.$$

综上, 引理得证. \square

引理2.7.7. 假设 e_h 是弱有限元空间 V_h^0 中的函数. 存在常数 C , 使得

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^{-1} \|(\partial_i e_0 - e_{gi}) \cdot n_j\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|e_h\|.$$

证明 由三角不等式,

$$\begin{aligned} & \|(\partial_i e_0 - e_{gi}) \cdot n_j\|_{\partial T}^2 \\ & \leq \|\partial_i e_0 - e_{gi}\|_{\partial T}^2 \\ & \leq 2 \left(\|\partial_i e_0 - Q_b(\partial_i e_0)\|_{\partial T}^2 + \|Q_b(\partial_i e_0) - e_{gi}\|_{\partial T}^2 \right) \\ & \leq Ch_T |e_0|_{2,T}^2 + 2\|Q_b(\partial_i e_0) - e_{gi}\|_{\partial T}^2. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^{-1} \|(\partial_i e_0 - e_{gi}) \cdot n_j\|_{\partial T}^2 \\ & \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (|e_0|_{2,T}^2 + h_T^{-1} \|Q_b(\partial_i e_0) - e_{gi}\|_{\partial T}^2) \\ & \leq C\|e_h\|^2, \end{aligned}$$

引理得证. \square

2.8 误差估计

本节旨在建立误差函数 $e_h = \{e_0, e_b, \mathbf{e}_g\}$ 在 H^2 等价范数意义下的误差估计, 及其三个分量 e_0 , e_b 和 \mathbf{e}_g 在 L^2 范数意义下的误差估计.

首先我们建立误差函数 e_h 在 H^2 等价范数意义下的误差估计. 从误差方程 (2.6.2) 知, 我们需估计 (2.6.3) 所定义的 $\phi_u(v)$ 的各项.

令 w 是 Ω 中光滑函数, 将 $\phi_w(v)$ 化简为

$$\begin{aligned}
 \phi_w(v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 w - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 w), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\
 &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 w - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 w) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T} \\
 &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla Q_0 w) - Q_b(\nabla w), Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g \rangle_{\partial T} \\
 &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle Q_b Q_0 w - Q_b w, Q_b v_0 - v_b \rangle_{\partial T} \\
 &= I_1(w, v) + I_2(w, v) + I_3(w, v) + I_4(w, v),
 \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

其中 $I_j(w, v)$ ($j = 1, \dots, 4$) 依次定义.

以下我们将分别估计 $I_j(w, v)$ ($j = 1, \dots, 4$).

引理 2.8.1. 假设 $w \in H^{r+1}(\Omega)$, $v \in V_h^0$, $r \in [2, k]$. 存在常数 C , 使得

$$|I_1(w, v)| \leq Ch^{r-1} \|w\|_{r+1} \|v\|, \tag{2.8.2}$$

$$|I_2(w, v)| \leq Ch^{r-1} (\|w\|_{r+1} + \delta_{k,2} \|w\|_4) \|v\|. \tag{2.8.3}$$

证明 对于 $I_1(w, v)$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 估计 (2.5.4) 中取 $m = r$, 以及引理 2.7.7,

$$\begin{aligned}
 |I_1(w, v)| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 w - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 w), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T \|\partial_{ij}^2 w - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 w)\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^{-1} \|(\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq Ch^{r-1} \|w\|_{r+1} \|v\|, \end{aligned}$$

从而, (2.8.2) 得证.

对于 $I_2(w, v)$, 当 $k = 2$ 时, 由引理 2.7.6,

$$\left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 w - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 w) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T} \right| \leq Ch \|w\|_4 \|v\|. \quad (2.8.4)$$

当 $k \geq 3$ 时, 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 估计 (2.5.5) 中取 $m = r$, 以及引理 2.7.3,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 w - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 w) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T} \right| \\ & \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^3 \|\partial_j (\partial_{ij}^2 w - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 w)\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|v_0 - v_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.8.5) \\ & \leq Ch^{r-1} \|w\|_{r+1} \|v\|. \end{aligned}$$

由 (2.8.4), (2.8.5),

$$|I_2(w, v)| \leq Ch^{r-1} (\|w\|_{r+1} + \delta_{k,2} \|w\|_4) \|v\|,$$

从而, (2.8.3) 得证. 引理得证. \square

引理 2.8.2. 假设 $w \in H^{r+1}(\Omega)$, $v \in V_h^0$, $r \in [2, k]$. 存在常数 C , 使得

$$|I_3(w, v)| + |I_4(w, v)| \leq Ch^{r-1} \|w\|_{r+1} |v|_h, \quad (2.8.6)$$

其中,

$$|v|_h = s(v, v)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8.7)$$

证明 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 估计 (2.5.6) 中取 $m = r$,

$$\begin{aligned}
 |I_3(w, v)| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \nabla Q_0 w - \nabla w, Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\nabla Q_0 w - \nabla w\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch^{r-1} \|w\|_{r+1} |v|_h.
 \end{aligned} \tag{2.8.8}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 估计 (2.5.7) 中取 $m = r$,

$$\begin{aligned}
 |I_4(w, v)| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle Q_0 w - w, Q_b v_0 - v_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_0 w - w\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_b v_0 - v_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch^{r-1} \|w\|_{r+1} |v|_h.
 \end{aligned} \tag{2.8.9}$$

由 (2.8.8)-(2.8.9), 引理得证. \square

以下定理给出了误差函数 e_h 在 $\|\cdot\|$ -范数意义下的估计, 其本质为在 H^2 等价范数意义下的估计.

定理 2.8.1. 令 $k \geq 2$. 假设 u_h 是 WG 算法 1 的有限元解; 重调和方程 (2.2.1) 的真解 u 充分正则, 使得 $u \in H^{\max\{k+1, 4\}}(\Omega)$. 存在常数 C , 使得

$$\|\|u_h - Q_h u\| \leq Ch^{k-1} \left(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4 \right). \tag{2.8.10}$$

也即在 H^2 等价范数意义下达到了最优阶误差估计.

证明 在误差方程 (2.6.2) 中, 取 $v = e_h$,

$$\begin{aligned} \|e_h\|^2 &= \phi_u(e_h) \\ &= I_1(u, e_h) + I_2(u, e_h) + I_3(u, e_h) + I_4(u, e_h). \end{aligned}$$

由估计 (2.8.2), (2.8.3), 以及 (2.8.6) 中取 $w = u$, $v = e_h$,

$$\|e_h\|^2 \leq Ch^{k-1} \left(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4 \right) \|e_h\|,$$

定理得证. \square

接下来, 我们分别建立误差函数 $e_h = \{e_0, e_b, \mathbf{e}_g\}$ 的三个分量 e_0 、 e_b 和 \mathbf{e}_g 在标准的 L^2 范数意义下的估计. 为此, 考虑对偶问题:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \psi &= e_0 \quad \text{在 } \Omega, \\ \psi &= 0 \quad \text{在 } \partial\Omega, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{在 } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.8.11}$$

假设对偶问题 (2.8.11) 具有 H^4 正则性假设:

$$\|\psi\|_4 \leq C \|e_0\|. \tag{2.8.12}$$

定理2.8.2. 令 $k \geq 2$, $t_0 = \min\{k, 3\}$. 假设 $u_h = \{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}$ 是 WG 算法 1 的有限元解; 重调和方程 (2.2.1) 的真解 u 充分正则, 使得当 $k = 2$ 时, $u \in H^4(\Omega)$, 否则 $u \in H^{k+1}(\Omega)$; 且对偶问题 (2.8.11) 具有 H^4 正则性假设 (2.8.12). 存在常数 C , 使得

$$\|Q_0 u - u_0\| \leq Ch^{k+t_0-2} \left(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4 \right). \tag{2.8.13}$$

也即当 $k = 2$ 时, 在 L^2 范数意义下达到了次最优阶误差估计; 当 $k \geq 3$ 时, 在 L^2 范数意义下达到了最优阶误差估计.

证明 (2.8.11) 两端作用 e_0 , 由分部积分,

$$\begin{aligned}
 \|e_0\|^2 &= (\Delta^2 \psi, e_0) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \left\{ (\partial_{ij}^2 \psi, \partial_{ij}^2 e_0)_T - \langle \partial_{ij}^2 \psi, \partial_i e_0 \cdot n_j \rangle_{\partial T} + \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 \psi) \cdot n_i, e_0 \rangle_{\partial T} \right\} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \left\{ (\partial_{ij}^2 \psi, \partial_{ij}^2 e_0)_T - \langle \partial_{ij}^2 \psi, (\partial_i e_0 - e_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \right. \\
 &\quad \left. + \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 \psi) \cdot n_i, e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \right\},
 \end{aligned}$$

由于内部边互相抵消, 且 e_b 和 e_{gi} 在 $\partial\Omega$ 上为 0, 故在上述等式中增加的与 e_b , e_{gi} 有关的项为 0. 在 (2.6.4) 中, 取 $u = \psi$, $v_0 = e_h$,

$$\begin{aligned}
 \|e_0\|^2 &= (\partial_w^2 Q_h \psi, \partial_w^2 e_h)_h \\
 &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \left\{ \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 \psi - Q_h(\partial_{ij}^2 \psi)) \cdot n_i, e_0 - e_b \rangle_{\partial T} \right. \\
 &\quad \left. - \langle \partial_{ij}^2 \psi - Q_h \partial_{ij}^2 \psi, (\partial_i e_0 - e_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \right\} \\
 &= (\partial_w^2 Q_h \psi, \partial_w^2 e_h)_h - \phi_\psi(e_h) + s(Q_h \psi, e_h).
 \end{aligned} \tag{2.8.14}$$

由误差方程 (2.6.2),

$$(\partial_w^2 Q_h \psi, \partial_w^2 e_h)_h = \phi_u(Q_h \psi) - s(e_h, Q_h \psi). \tag{2.8.15}$$

将 (2.8.15) 代入到 (2.8.14),

$$\|e_0\|^2 = \phi_u(Q_h \psi) - \phi_\psi(e_h). \tag{2.8.16}$$

在引理 2.8.1-2.8.2 中, 取 $r = t_0 = \min\{k, 3\}$, 由正则性假设 (2.8.12),

$$\begin{aligned} |\phi_\psi(e_h)| &\leq Ch^{t_0-1}(\|\psi\|_{t_0+1} + h\|\psi\|_4)\|e_h\| \\ &\leq Ch^{t_0-1}\|\psi\|_4\|e_h\| \\ &\leq Ch^{t_0-1}\|e_0\|\|e_h\|. \end{aligned} \quad (2.8.17)$$

下估计 (2.8.16) 中的项 $\phi_u(Q_h\psi)$. 由 (2.8.1),

$$\phi_u(Q_h\psi) = \sum_{j=1}^4 I_j(u, Q_h\psi). \quad (2.8.18)$$

在引理 2.8.2 中, 取 $r = k$,

$$|I_3(u, Q_h\psi)| + |I_4(u, Q_h\psi)| \leq Ch^{k-1}\|u\|_{k+1}|Q_h\psi|_h. \quad (2.8.19)$$

由 (2.8.7),

$$\begin{aligned} |Q_h\psi|_h^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^{-3}\|Q_b(Q_0\psi) - Q_b\psi\|_{\partial T}^2 + h_T^{-1}\|Q_b(\nabla Q_0\psi) - Q_b\nabla\psi\|_{\partial T}^2) \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^{-3}\|Q_0\psi - \psi\|_{\partial T}^2 + h_T^{-1}\|\nabla(Q_0\psi) - \nabla\psi\|_{\partial T}^2). \end{aligned}$$

由迹不等式 (1.4.10), 投影算子 Q_0 的误差估计,

$$|Q_h\psi|_h \leq Ch^{t_0-1}\|\psi\|_{t_0+1} \leq Ch^{t_0-1}\|\psi\|_4 \leq Ch^{t_0-1}\|e_0\|.$$

将上述估计代入 (2.8.19),

$$|I_3(u, Q_h\psi)| + |I_4(u, Q_h\psi)| \leq Ch^{k+t_0-2}\|u\|_{k+1}\|e_0\|. \quad (2.8.20)$$

为估计 $I_1(u, Q_h\psi)$ 和 $I_2(u, Q_h\psi)$, 我们讨论检验函数 $Q_h\psi$ 的特殊性质. 为

此, 由 Q_b 的正交性, 以及在 $\partial\Omega$, $\psi = Q_b\psi = 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, \psi - Q_b\psi \rangle_{\partial T} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j \partial_{ij}^2 u \cdot n_i, \psi - Q_b\psi \rangle_{\partial T} = 0. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} I_2(u, Q_h\psi) &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, Q_0\psi - Q_b\psi \rangle_{\partial T} \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, Q_0\psi - \psi \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 L^2 投影的标准误差估计,

$$\begin{aligned} |I_2(u, Q_h\psi)| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \|\partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u)\|_{\partial T} \|Q_0\psi - \psi\|_{\partial T} \\ &\leq Ch^{k+t_0-2} (\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4) \|\psi\|_{t_0+1} \\ &\leq Ch^{k+t_0-2} (\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4) \|\psi\|_4 \\ &\leq Ch^{k+t_0-2} (\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4) \|e_0\|. \end{aligned} \tag{2.8.21}$$

同理,

$$|I_1(u, Q_h\psi)| \leq Ch^{k+t_0-2} \|u\|_{k+1} \|e_0\|. \tag{2.8.22}$$

将 (2.8.20), (2.8.21), (2.8.22) 代入 (2.8.18),

$$|\phi_u(Q_h\psi)| \leq Ch^{k+t_0-2}(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2}\|u\|_4)\|e_0\|. \quad (2.8.23)$$

将 (2.8.17), (2.8.23) 代入 (2.8.16),

$$\|e_0\|^2 \leq C(h^{t_0-1}\|e_h\| + h^{k+t_0-2}(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2}\|u\|_4))\|e_0\|,$$

再由定理 2.8.1 中的估计 (2.8.10), 定理得证. \square

定理2.8.3. 令 $k \geq 2$, $t_0 = \min\{k, 3\}$. 假设 $u_h = \{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}$ 是 WG 算法 1 的有限元解; 重调和方程 (2.2.1) 的真解 u 充分正则, 使得当 $k = 2$ 时, $u \in H^4(\Omega)$, 否则 $u \in H^{k+1}(\Omega)$; 且对偶问题 (2.8.11) 具有 H^4 正则性假设 (2.8.12). 定义

$$\|u_b\| = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|u_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8.24)$$

存在常数 C , 使得

$$\|Q_b u - u_b\| \leq Ch^{k+t_0-2}(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2}\|u\|_4).$$

也即当 $k = 2$ 时, 在 L^2 范数意义下达到了次最优阶误差估计; 当 $k \geq 3$ 时, 在 L^2 范数意义下达到了最优阶误差估计.

证明 在误差方程 (2.6.2) 中, 取 $v = \{0, e_b, \mathbf{0}\}$, 则

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij,w}^2 e_h, \partial_{ij,w}^2 v)_T + h_T^{-3} \langle Q_b e_0 - e_b, -e_b \rangle_{\partial T} \right) \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j (\partial_{ij}^2 u - Q_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, -e_b \rangle_{\partial T} \right. \\ & \quad \left. + h_T^{-3} \langle Q_b Q_0 u - Q_b u, -e_b \rangle_{\partial T} \right). \end{aligned} \quad (2.8.25)$$

在 (2.3.4) 中, 取 $\varphi = \partial_{ij,w}^2 e_h$,

$$(\partial_{ij,w,r,T}^2 v, \partial_{ij,w}^2 e_h)_T = -\langle e_b, \partial_j(\partial_{ij,w}^2 e_h) \cdot n_i \rangle_{\partial T}. \quad (2.8.26)$$

将 (2.8.26) 代入 (2.8.25),

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{i,j=1}^d -\langle e_b, \partial_j(\partial_{ij,w}^2 e_h) \cdot n_i \rangle_{\partial T} + h_T^{-3} \langle Q_b e_0 - e_b, -e_b \rangle_{\partial T} \right) \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - Q_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, -e_b \rangle_{\partial T} \right. \\ & \quad \left. + h_T^{-3} \langle Q_b Q_0 u - Q_b u, -e_b \rangle_{\partial T} \right). \end{aligned}$$

上式整理得

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle e_b, e_b \rangle_{\partial T} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle e_b, \partial_j(\partial_{ij,w}^2 e_h) \cdot n_i \rangle_{\partial T} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle Q_b e_0, e_b \rangle_{\partial T} \\ & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - Q_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, e_b \rangle_{\partial T} \\ & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle Q_b Q_0 u - Q_b u, -e_b \rangle_{\partial T} \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \end{aligned} \quad (2.8.27)$$

其中 J_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 依次定义. 以下分别估计 J_i ($i = 1, 2, 3, 4$). 对于 J_1 , 由

Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.24), 逆不等式 (1.4.23),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle e_b, \partial_j(\partial_{ij,w}^2 e_h) \cdot n_i \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|e_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^{-1} \|\partial_j(\partial_{ij,w}^2 e_h) \cdot n_i\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \|e_b\| \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^{-4} \|\partial_{ij,w}^2 e_h\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{-2} \|e_h\| \|e_b\|.
 \end{aligned}$$

对于 J_2 , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.24),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle Q_b e_0, e_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|e_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-7} \|Q_b e_0\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \|e_b\| \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-7} \|e_0\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \|e_b\| \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-8} \|e_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{-4} \|e_b\| \|e_0\|.
 \end{aligned}$$

对于 J_3 , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, (2.5.5),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, -e_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq Ch^{-2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|e_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^3 \|\partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u)\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{k-3} \|e_b\| (\|u\|_{k+1} + h\delta_{k,2} \|u\|_4).
 \end{aligned}$$

对于 J_4 , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, (2.5.7),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle Q_b Q_0 u - Q_b u, -e_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq Ch^{-2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|e_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_b Q_0 u - Q_b u\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{k-3} \|e_b\| \|u\|_{k+1}.
 \end{aligned}$$

由 (2.8.27), J_1 - J_4 的估计, 以及有限元剖分 \mathcal{T}_h 的形状正则性假设,

$$\begin{aligned}
 h^{-4} \|e_b\|^2 & \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \langle e_b, e_b \rangle_{\partial T} \\
 & \leq C(h^{-2} \|e_h\| + h^{-4} \|e_0\| + h^{k-3} (\|u\|_{k+1} + h\delta_{k,2} \|u\|_4) \\
 & \quad + h^{k-3} \|u\|_{k+1}) \|e_b\|.
 \end{aligned}$$

再由 (2.8.10), (2.8.13),

$$\|e_b\| \leq C \left(h^2 \|e_h\| + \|e_0\| + h^{k+1} (\|u\|_{k+1} + h\delta_{k,2} \|u\|_4) + h^{k+1} \|u\|_{k+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C\left(h^2 \cdot h^{k-1}(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2}\|u\|_4) + h^{k+t_0-2}(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2}\|u\|_4)\right. \\
 &\quad \left.+ h^{k+1}(\|u\|_{k+1} + h\delta_{k,2}\|u\|_4) + h^{k+1}\|u\|_{k+1}\right) \\
 &\leq Ch^{k+t_0-2}(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2}\|u\|_4).
 \end{aligned}$$

定理得证. \square

定理2.8.4. 令 $k \geq 2$, $t_0 = \min\{k, 3\}$. 假设 $u_h = \{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}$ 是 WG 算法 1 的有限元解; 重调和方程 (2.2.1) 的真解 u 充分正则, 使得当 $k = 2$ 时, $u \in H^4(\Omega)$, 否则 $u \in H^{k+1}(\Omega)$; 且对偶问题 (2.8.11) 具有 H^4 正则性假设 (2.8.12). 定义

$$\|\mathbf{u}_g\| = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\mathbf{u}_g\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8.28)$$

存在常数 C , 使得

$$\|Q_b(\nabla u) - \mathbf{u}_g\| \leq Ch^{k+t_0-3}(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2}\|u\|_4).$$

也即当 $k = 2$ 时, 在 L^2 范数意义下达到了次最优阶误差估计; 当 $k \geq 3$ 时, 在 L^2 范数意义下达到了最优阶误差估计.

证明 在误差方程 (2.6.2) 中, 取 $v = \{0, 0, \mathbf{e}_g\}$, 则

$$\begin{aligned}
 &\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij,w}^2 e_h, \partial_{ij,w}^2 v)_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla e_0) - \mathbf{e}_g, -\mathbf{e}_g \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - Q_h(\partial_{ij}^2 u), -e_{gi} \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\
 &\quad + h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla Q_0 u) - Q_b(\nabla u), -\mathbf{e}_g \rangle_{\partial T}.
 \end{aligned} \quad (2.8.29)$$

在 (2.3.4) 中, 取 $\varphi = \partial_{ij,w}^2 e_h$,

$$(\partial_{ij,w,r,T}^2 v, \partial_{ij,w}^2 e_h)_T = \langle e_{gi} \cdot n_j, \partial_{ij,w}^2 e_h \rangle_{\partial T}. \quad (2.8.30)$$

将 (2.8.30) 代入 (2.8.29),

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle e_{gi} \cdot n_j, \partial_{ij,w}^2 e_h \rangle_{\partial T} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla e_0) - \mathbf{e}_g, -\mathbf{e}_g \rangle_{\partial T} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u), -e_{gi} \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\ & \quad + h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla Q_0 u) - Q_b(\nabla u), -\mathbf{e}_g \rangle_{\partial T}, \end{aligned}$$

上式整理得

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle -\mathbf{e}_g, -\mathbf{e}_g \rangle_{\partial T} \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle e_{gi} \cdot n_j, \partial_{ij,w}^2 e_h \rangle_{\partial T} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla e_0), \mathbf{e}_g \rangle_{\partial T} \\ & \quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u), e_{gi} \cdot n_j \rangle_{\partial T} \quad (2.8.31) \\ & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla Q_0 u) - Q_b(\nabla u), -\mathbf{e}_g \rangle_{\partial T} \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \end{aligned}$$

其中 J_i ($i = 1, \dots, 4$) 依次定义. 以下分别估计 J_i ($i = 1, \dots, 4$). 对于 J_1 , 由

Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.24),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle e_{gi} \cdot n_j, \partial_{ij,w}^2 e_h \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T \|e_{gi}\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^{-1} \|\partial_{ij,w}^2 e_h\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \|\mathbf{e}_g\| \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T^{-2} \|\partial_{ij,w}^2 e_h\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{-1} \|\mathbf{e}_g\| \|e_h\|.
 \end{aligned}$$

对于 J_2 , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.24), 逆不等式 (1.4.23),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla e_0), \mathbf{e}_g \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_b(\nabla e_0)\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\mathbf{e}_g\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-6} \|e_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_g\| \\
 & \leq Ch^{-3} \|e_0\| \|\mathbf{e}_g\|.
 \end{aligned}$$

对于 J_3 , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, (2.5.4),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u), e_{gi} \cdot n_j \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq Ch^{-1} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T \|\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u)\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T \|e_{gi}\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{k-2} \|u\|_{k+1} \|\mathbf{e}_g\|.
 \end{aligned}$$

对于 J_4 , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, (2.5.6),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla Q_0 u) - Q_b(\nabla u), -\mathbf{e}_g \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq Ch^{-1} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_b(\nabla Q_0 u) - Q_b(\nabla u)\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d h_T \|\mathbf{e}_g\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq Ch^{k-2} \|u\|_{k+1} \|\mathbf{e}_g\|.
 \end{aligned}$$

由 (2.8.31), J_1 - J_4 的估计, 以及有限元剖分 \mathcal{T}_h 的形状正则性假设,

$$\begin{aligned}
 h^{-2} \|\mathbf{e}_g\|^2 & \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle -\mathbf{e}_g, -\mathbf{e}_g \rangle_{\partial T} \\
 & \leq C(h^{-1} \|e_h\| + h^{-3} \|e_0\| + h^{k-2} \|u\|_{k+1}) \|\mathbf{e}_g\|.
 \end{aligned}$$

再由 (2.8.10), (2.8.13),

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}_g\| & \leq C(h \|e_h\| + h^{-1} \|e_0\| + h^k \|u\|_{k+1}) \\
 & \leq C \left(h \cdot h^{k-1} (\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4) + h^{-1} \cdot h^{k+t_0-2} (\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4) \right. \\
 & \quad \left. + h^k \|u\|_{k+1} \right) \\
 & \leq Ch^{k+t_0-3} (\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4).
 \end{aligned}$$

定理得证. \square

第3章 重调和方程的弱有限元方法的数值实验

基于本文第二章提出的 WG 有限元方法, 本章将推导相应的数值计算格式, 特别将提出一种 Schur 补矩阵形式. 关于数值实验, 本章将分别从变分和 Schur 补矩阵形式出发, 对 WG 有限元格式进行多种数值实验. 数值实验结果充分验证了第二章所建立的 WG 有限元方法的收敛精度.

为简便起见, 本章将以最低阶元即分片二次元 $k = 2$ 为例阐述. 取有限元空间

$$\tilde{V}_h = \{v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\}, v_0 \in P_2(T), v_b \in P_0(e), \mathbf{v}_g \in [P_0(e)]^2, T \in \mathcal{T}_h, e \in \mathcal{E}_h\}.$$

对任意给定的 $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \tilde{V}_h$, 其离散弱二阶偏导数 $\partial_{ij,w,r,T}^2 v$ 在每个单元 T 为常数. 具体计算方法如下: 对任意的 $\varphi \in P_0(T)$, 满足

$$(\partial_{ij,w,r,T}^2 v, \varphi)_T = (v_0, \partial_{ji}^2 \varphi)_T - \langle v_b, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} + \langle v_{gi} \cdot n_j, \varphi \rangle_{\partial T}, \quad i, j = 1, 2.$$

即

$$(\partial_{ij,w,r,T}^2 v, \varphi)_T = \langle v_{gi} \cdot n_j, \varphi \rangle_{\partial T}, \quad i, j = 1, 2.$$

取 $\varphi = 1$ 即可通过上式计算相应的离散弱二阶偏导数. 定义如下范数:

$$\begin{aligned} \|v\| &= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\sum_{i,j=1}^d \int_T (\partial_{ij,w}^2 v)^2 dx + h_T^{-1} \int_{\partial T} |Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g|^2 ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h_T^{-3} \int_{\partial T} (Q_b v_0 - v_b)^2 ds \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{离散 } H^2 \text{-范}), \end{aligned}$$

$$\|v\| = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T v_0^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{基于元的 } L^2 \text{-范}),$$

$$\|v_b\|_\infty = \max_{e \in \mathcal{E}_h} \|v_b\|_{\infty, e}, \quad (\text{基于边的 } L^\infty \text{-范}),$$

$$\|\mathbf{v}_g\|_\infty = \max_{e \in \mathcal{E}_h} \|\mathbf{v}_g\|_{\infty, e}, \quad (\text{基于边的 } L^\infty \text{-范}).$$

我们的数值试验所选的区域是单位正方形 $\Omega = (0, 1)^2$. 在每个算例中, 根据给定真解我们计算出右端函数 $f = f(x, y)$, 以及相应的 Dirichlet 和 Neumann 边界值. 数值试验将在两类剖分上实施: (1) 一致三角剖分, (2) 一致矩形剖分. 其中一致矩形剖分通过将区域 Ω 划分为 $n \times n$ 个子矩形得到. 一致三角剖分则是在一致矩形剖分基础上, 将矩形剖分中每个矩形单元通过一个斜率为负的直线划分为 2 个直角三角形得到. 网格大小为 $h = 1/n$.

3.1 基于变分形式的弱有限元方法的数值实验

本节以一致三角剖分下最低阶元 $k = 2$ 为例阐述 WG 算法 1 的基于变分形式的程序实现的详细过程, 并给出相关的数值实验结果.

3.1.1 程序实现

WG 算法 1 中, 记 (2.4.2) 的左端为

$$a(u_h, v) = (\partial_w^2 u_h, \partial_w^2 v)_h + s(u_h, v).$$

在每个单元 T 上, $u_0 \in P_2(T)$, 基函数取为二次多项式 $\phi_{0,j,T}(x)$ ($j = 1, \dots, 6$); $u_b \in P_0(e)$, 基函数取为 $\phi_{b,1,T}(x) = (1, 0, 0)'$, $\phi_{b,2,T}(x) = (0, 1, 0)'$, $\phi_{b,3,T}(x) = (0, 0, 1)'$; $\mathbf{u}_g \in [P_0(e)]^2$, 基函数取为 $\phi_{g,1,T}(x) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)'$, $\phi_{g,2,T}(x) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)'$, $\phi_{g,3,T}(x) = (0, 0, 0, 0, 1, 0)'$, $\phi_{g,4,T}(x) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)'$, $\phi_{g,5,T}(x) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)'$, $\phi_{g,6,T}(x) = (0, 0, 0, 0, 0, 1)'$, 则

$$u_0 = \sum_{j=1}^6 u_{0,T,j} \phi_{0,j,T}(x),$$

$$u_b = \sum_{j=1}^3 u_{b,T,j} \phi_{b,j,T}(x),$$

$$\mathbf{u}_g = \sum_{j=1}^6 u_{g,T,j} \phi_{g,j,T}(x).$$

令 $u_h = \sum_{i=1}^{15} u_i \phi_i$, 其中 $\phi_i = \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\}$ ($i = 1, \dots, 6$), $\phi_{i+6} = \{0, \phi_{b,i,T}, \mathbf{0}\}$ ($i = 1, \dots, 3$), $\phi_{i+9} = \{0, 0, \phi_{g,i,T}\}$ ($i = 1, \dots, 6$), 则在单元 T 上, 变分形式 (2.4.2) 为

$$a_T(u_h, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j = 1, \dots, 15. \quad (3.1.1)$$

这里,

$$a_T(u_h, v_h) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} u_h, \partial_{kl,w} v_h)_T$$

$$+ h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla u_0) - \mathbf{u}_g, Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g \rangle_{\partial T}$$

$$+ h_T^{-3} \langle Q_b u_0 - u_b, Q_b v_0 - v_b \rangle_{\partial T},$$

且

$$a(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(u_h, v_h).$$

基于单元变分形式 (3.1.1), 单元刚度矩阵 $A = (A_{ij})_{15 \times 15}$ 可计算如下.

当 $i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 6$,

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{0,i,T}, \partial_{kl,w} \phi_{0,j,T})_T$$

$$+ h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla \phi_{0,i,T}), Q_b(\nabla \phi_{0,j,T}) \rangle_{\partial T}$$

$$+ h_T^{-3} \langle Q_b \phi_{0,i,T}, Q_b \phi_{0,j,T} \rangle_{\partial T}.$$

当 $i = 1, \dots, 6, j = 7, \dots, 9,$

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{0,i,T}, \partial_{kl,w} \phi_{b,j-6,T})_T \\ + h_T^{-3} \langle Q_b \phi_{0,i,T}, -\phi_{b,j-6,T} \rangle_{\partial T}.$$

当 $i = 1, \dots, 6, j = 10, \dots, 15,$

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{0,i,T}, \partial_{kl,w} \phi_{g,j-9,T})_T \\ + h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla \phi_{0,i,T}), -\phi_{g,j-9,T} \rangle_{\partial T}.$$

当 $i = 7, \dots, 9, j = 1, \dots, 6,$

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{b,i-6,T}, \partial_{kl,w} \phi_{0,j,T})_T \\ + h_T^{-3} \langle -\phi_{b,i-6,T}, Q_b \phi_{0,j,T} \rangle_{\partial T}.$$

当 $i = 7, \dots, 9, j = 7, \dots, 9,$

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{b,i-6,T}, \partial_{kl,w} \phi_{b,j-6,T})_T \\ + h_T^{-3} \langle \phi_{b,i-6,T}, \phi_{b,j-6,T} \rangle_{\partial T}.$$

当 $i = 7, \dots, 9, j = 10, \dots, 15,$

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{b,i-6,T}, \partial_{kl,w} \phi_{g,j-9,T})_T.$$

当 $i = 10, \dots, 15, j = 1, \dots, 6$,

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{g,i-9,T}, \partial_{kl,w} \phi_{0,j,T})_T \\ + h_T^{-1} \langle -\phi_{g,i-9,T}, Q_b(\nabla(\phi_{0,j,T})) \rangle_{\partial T}.$$

当 $i = 10, \dots, 15, j = 7, \dots, 9$,

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{g,i-9,T}, \partial_{kl,w} \phi_{b,j-6,T})_T.$$

当 $i = 10, \dots, 15, j = 10, \dots, 15$,

$$A_{ij} = a_T(\phi_i, \phi_j)_T = \sum_{k,l=1}^2 (\partial_{kl,w} \phi_{g,i-9,T}, \partial_{kl,w} \phi_{g,j-9,T})_T \\ + h_T^{-1} \langle -\phi_{g,i-9,T}, -\phi_{g,j-9,T} \rangle_{\partial T}.$$

为计算单元刚度矩阵 $A = (A_{ij})_{15 \times 15}$, 需计算以下各项:

1. 计算 $\partial_{kl,w}^2 \phi_{0,i,T}, i = 1, \dots, 6 (k, l = 1, 2)$.

由 $\partial_{kl,w}^2$ 定义知,

$$\partial_{kl,w}^2 \phi_{0,i,T} = 0, \quad i = 1, \dots, 6 (k, l = 1, 2).$$

2. 计算 $\partial_{kl,w}^2 \phi_{b,i,T}, i = 1, \dots, 3 (k, l = 1, 2)$.

由 $\partial_{kl,w}^2$ 定义知,

$$\partial_{kl,w}^2 \phi_{b,i,T} = 0, \quad i = 1, \dots, 3 (k, l = 1, 2).$$

3. 计算 $\partial_{kl,w}^2 \phi_{g,i,T}, i = 1, \dots, 6 (k, l = 1, 2)$.

由 $\partial_{kl,w}^2$ 定义知,

$$\partial_{kl,w}^2 \phi_{g,1,T} = \frac{\int_{e_1} (\phi_{g,1,T}|_{e_1})_k(\mathbf{n}_1)_l ds}{|T|} = \frac{|e_1| \cdot (\phi_{g,1,T}|_{e_1})_k(\mathbf{n}_1)_l}{|T|},$$

$$\partial_{kl,w}^2 \phi_{g,2,T} = \frac{\int_{e_2} (\phi_{g,2,T}|_{e_2})_k(\mathbf{n}_2)_l ds}{|T|} = \frac{|e_2| \cdot (\phi_{g,2,T}|_{e_2})_k(\mathbf{n}_2)_l}{|T|},$$

$$\partial_{kl,w}^2 \phi_{g,3,T} = \frac{\int_{e_3} (\phi_{g,3,T}|_{e_3})_k(\mathbf{n}_3)_l ds}{|T|} = \frac{|e_3| \cdot (\phi_{g,3,T}|_{e_3})_k(\mathbf{n}_3)_l}{|T|},$$

$$\partial_{kl,w}^2 \phi_{g,4,T} = \frac{\int_{e_1} (\phi_{g,4,T}|_{e_1})_k(\mathbf{n}_1)_l ds}{|T|} = \frac{|e_1| \cdot (\phi_{g,4,T}|_{e_1})_k(\mathbf{n}_1)_l}{|T|},$$

$$\partial_{kl,w}^2 \phi_{g,5,T} = \frac{\int_{e_2} (\phi_{g,5,T}|_{e_2})_k(\mathbf{n}_2)_l ds}{|T|} = \frac{|e_2| \cdot (\phi_{g,5,T}|_{e_2})_k(\mathbf{n}_2)_l}{|T|},$$

$$\partial_{kl,w}^2 \phi_{g,6,T} = \frac{\int_{e_3} (\phi_{g,6,T}|_{e_3})_k(\mathbf{n}_3)_l ds}{|T|} = \frac{|e_3| \cdot (\phi_{g,6,T}|_{e_3})_k(\mathbf{n}_3)_l}{|T|},$$

其中, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 表示边 e_1, e_2, e_3 的单位外法向. $\phi_{g,1,T}|_{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi_{g,2,T}|_{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi_{g,3,T}|_{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi_{g,4,T}|_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi_{g,5,T}|_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi_{g,6,T}|_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $(\mathbf{n}_i)_l$ ($i = 1, 2, 3$) 表示向量 \mathbf{n}_i ($i = 1, 2, 3$) 的第 l 个分量. $|e_i|$ ($i = 1, 2, 3$) 表示边 e_i ($i = 1, 2, 3$) 的长度. $|T|$ 表示单元 T 的面积.

4. 计算 $Q_b(\nabla \phi_{0,i,T})$, $i = 1, \dots, 6$.

令 $Q_b(\nabla \phi_{0,i,T}) = \sum_{i=1}^6 c_i \phi_{g,i,T}$. 由投影定义,

$$\langle Q_b \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial y} \end{array} \right), \phi_{g,j,T} \rangle_{\partial T} = \left\langle \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial y} \end{array} \right\rangle_{\partial T}, \quad j = 1, \dots, 6,$$

即

$$\left\langle \sum_{i=1}^6 c_i \phi_{g,i,T}, \phi_{g,j,T} \right\rangle_{\partial T} = \left\langle \begin{array}{c} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial y} \end{array} \right\rangle_{\partial T}, \quad j = 1, \dots, 6,$$

易得

$$c_1 = \frac{\int_{e_1} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial x} ds}{|e_1|}, \quad c_2 = \frac{\int_{e_2} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial x} ds}{|e_2|}, \quad c_3 = \frac{\int_{e_3} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial x} ds}{|e_3|},$$

$$c_4 = \frac{\int_{e_1} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial y} ds}{|e_1|}, \quad c_5 = \frac{\int_{e_2} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial y} ds}{|e_2|}, \quad c_6 = \frac{\int_{e_3} \frac{\partial \phi_{0,i,T}}{\partial y} ds}{|e_3|}.$$

5. 计算 $Q_b \phi_{0,i,T}$, $i = 1, \dots, 6$.

令 $Q_b \phi_{0,i,T} = \sum_{i=1}^3 c_i \phi_{b,i,T}$. 由投影定义,

$$\langle Q_b \phi_{0,i,T}, \phi_{b,j,T} \rangle_{\partial T} = \langle \phi_{0,i,T}, \phi_{b,j,T} \rangle_{\partial T}, \quad j = 1, 2, 3,$$

即

$$\left\langle \sum_{i=1}^3 c_i \phi_{b,i,T}, \phi_{b,j,T} \right\rangle_{\partial T} = \langle \phi_{0,i,T}, \phi_{b,j,T} \rangle_{\partial T}, \quad j = 1, 2, 3,$$

易得

$$c_1 = \frac{\int_{e_1} \phi_{0,i,T} ds}{|e_1|}, \quad c_2 = \frac{\int_{e_2} \phi_{0,i,T} ds}{|e_2|}, \quad c_3 = \frac{\int_{e_3} \phi_{0,i,T} ds}{|e_3|}.$$

在程序具体实现过程中, 首先计算单元刚度矩阵和单元荷载向量, 然后合成总体刚度矩阵以及总体右端项. 再根据边界条件作相应的边界处理, 然后求解相应代数方程组以得到 **WG** 有限元解. 最后计算各种误差. 为计算 $\|\cdot\|$ -范的误差, 我们需计算 $Q_0 u$, $Q_b u$ 和 $Q_b(\nabla u)$. 为方便起见, 我们这里仅对一个单元的情况给出具体计算过程和方法.

首先给出 $Q_0 u$ 计算方法和步骤.

令 $Q_0 u = \sum_{i=1}^6 c_i \phi_{0,i,T}$, 由投影定义,

$$\int_T Q_0 u \phi_{0,j,T} = \int_T u \phi_{0,j,T}, \quad j = 1, \dots, 6.$$

相应的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} (\phi_{0,1,T}, \phi_{0,1,T})_T & \cdots & (\phi_{0,1,T}, \phi_{0,6,T})_T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\phi_{0,6,T}, \phi_{0,1,T})_T & \cdots & (\phi_{0,6,T}, \phi_{0,6,T})_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_T u \phi_{0,1,T} d\mathbf{x} \\ \vdots \\ \int_T u \phi_{0,6,T} d\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

从而, 求得 \mathbf{c}_i ($i = 1, \dots, 6$).

接下来, 我们给出 $Q_b u$ 的计算方法和步骤.

令 $Q_b u = \sum_{i=7}^9 c_i \phi_{i,b}$, 其中 $\phi_{i,b} = \begin{cases} 1, & \text{边 } e_{i-6} \\ 0, & \text{其它边} \end{cases}$ ($i = 7, 8, 9$). 由投影定义知,

$$\int_{e_{j-6}} Q_b u \phi_{j,b} ds = \int_{e_{j-6}} u \phi_{j,b} ds, \quad j = 7, \dots, 9,$$

即

$$\int_{e_{j-6}} \sum_{i=7}^9 c_i \phi_{i,b} \phi_{j,b} ds = \int_{e_{j-6}} u \phi_{j,b} ds, \quad j = 7, \dots, 9,$$

易得

$$c_i = \frac{\int_{e_{i-6}} u ds}{|e_{i-6}|}, \quad i = 7, \dots, 9.$$

最后计算 $Q_b(\nabla u)$.

令 $Q_b(\nabla u) = \sum_{i=10}^{12} c_i \phi_{i,g1} + \sum_{i=13}^{15} c_i \phi_{i,g2}$, 其中 $\phi_{i,g1} = \begin{cases} (1, 0)', & \text{边 } e_{i-9} \\ (0, 0)', & \text{其它边} \end{cases}$
 ($i = 10, 11, 12$), $\phi_{i,g2} = \begin{cases} (0, 1)', & \text{边 } e_{i-12} \\ (0, 0)', & \text{其它边} \end{cases}$ ($i = 13, 14, 15$). 由投影定义,

$$\int_{e_{j-9}} Q_b(\nabla u) \phi_{j,g1} ds = \int_{e_{j-9}} \nabla u \phi_{j,g1} ds, \quad j = 10, \dots, 12,$$

即

$$\int_{e_{j-9}} \left(\sum_{i=10}^{12} c_i \phi_{i,g1} + \sum_{i=13}^{15} c_i \phi_{i,g2} \right) \phi_{j,g1} ds = \int_{e_{j-9}} \nabla u \phi_{j,g1} ds, \quad j = 10, \dots, 12,$$

即

$$\int_{e_{j-9}} \left(\sum_{i=10}^{12} c_i \phi_{i,g1} \right) \phi_{j,g1} ds = \int_{e_{j-9}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \phi_{j,g1} ds, \quad j = 10, \dots, 12,$$

易得

$$c_i = \frac{\int_{e_{i-9}} \frac{\partial u}{\partial x} ds}{|e_{i-9}|}, \quad i = 10, \dots, 12.$$

同理,

$$c_i = \frac{\int_{e_{i-12}} \frac{\partial u}{\partial y} ds}{|e_{i-12}|}, \quad i = 13, \dots, 15.$$

3.1.2 数值计算结果

本小节给出基于变分形式的 WG 算法 1 在一致三角剖分下不同真解所对应的数值结果. 数值结果清楚地验证了第二章所建立的 WG 有限元收敛理论.

表 3-1 给出了真解 $u = x^2 + y^2 + xy + x + y + 1$ 的数值结果. 理论上, WG 算法 1 对于二次多项式是精确的. 换言之, 数值结果与真解的 L^2 投影应一致. 此表明确显示 WG 有限元解就是真解的投影, 该实验的主要目的是验证程序的正确性.

表 3-1 一致三角剖分上真解 $u = x^2 + y^2 + xy + x + y + 1$ 对应的数值误差.

h	$\ Q_0 u - u_0\ $	$\ u_h - Q_h u\ $
1	2.568955748600734e-014	5.974941461088302e-014
5.0000e-01	3.134068575249911e-014	2.061464885899755e-013
2.5000e-01	8.079883007085310e-014	1.167666662425914e-012
1.2500e-01	2.700429964305757e-013	7.422329368471330e-012
6.2500e-02	2.333443702945186e-012	7.893676001981001e-011
3.1250e-02	2.794618066103603e-011	1.002086193020140e-009
1.5625e-02	4.705734171091537e-011	3.745874965247248e-009

表 3-2 给出了真解 $u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ 的数值结果. 该真解所对应的重调和方程具齐次 Dirichlet 和 Neumann 边界值. 数值结果表明 WG 算法 1 的解在 H^2 和 L^2 范数下的收敛阶分别为 $\mathcal{O}(h)$ 和 $\mathcal{O}(h^2)$, 与理论结果一致.

表 3-2 一致三角剖分上真解 $u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ 对应的数值误差和收敛阶.

h	$\ Q_0u - u_0\ $	阶	$\ u_h - Q_hu\ $	阶
1	0.41325894798926		0.81559800775053	
5.0000e-01	0.07371160477664	2.5	0.35489969199838	1.2
2.5000e-01	0.01985915494645	1.9	0.19713754602239	0.8
1.2500e-01	0.00517619984362	1.9	0.10176602830681	1.0
6.2500e-02	0.00138330553757	1.9	0.05264921796956	1.0
3.1250e-02	3.749938763086827e-004	1.9	0.02736956886938	0.9
1.5625e-02	9.976844038138141e-005	1.9	0.01409016641392	1.0

表 3-3 给出了真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 的数值结果. 该真解所对应的重调和方程具齐次 Dirichlet 和非齐次 Neumann 边界值. 数值结果表明 WG 算法 1 的解在 H^2 和 L^2 范数下的收敛阶分别为 $\mathcal{O}(h)$ 和 $\mathcal{O}(h^2)$, 与理论结果一致.

表 3-3 一致三角剖分上真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 对应的数值误差和收敛阶.

h	$\ Q_0u - u_0\ $	阶	$\ u_h - Q_hu\ $	阶
1	40.97063908362118		80.94178656067382	
5.0000e-01	7.35268733170625	2.5	35.57387445374166	1.2
2.5000e-01	1.90692935294815	1.9	18.93158300113234	0.9
1.2500e-01	0.48719482275780	2.0	9.67726093717987	1.0
6.2500e-02	0.12627122627269	1.9	4.94321519389703	1.0
3.1250e-02	0.03270240234471	1.9	2.52054110573032	1.0
1.5625e-02	0.00835457626481	2.0	1.27502727884238	1.0

表 3-4 给出了真解 $u = x(1-x)y(1-y)$ 的数值结果. 该真解所对应的重调和方程具齐次 Dirichlet 和 Neumann 边界值. 数值结果表明 WG 算法 1 的解在 H^2 和 L^2 范数下的收敛阶分别为 $\mathcal{O}(h)$ 和 $\mathcal{O}(h^2)$, 与理论结果一致.

表 3-4 一致三角剖分上真解 $u = x(1-x)y(1-y)$ 对应的数值误差和收敛阶.

h	$\ Q_0 u - u_0\ $	阶	$\ u_h - Q_h u\ $	阶
1	2.05585966372125		4.05771734861522	
5.0000e-01	0.32233606308233	2.7	1.59960823754093	1.3
2.5000e-01	0.06653793518379	2.3	0.70889894759431	1.2
1.2500e-01	0.01587934340160	2.1	0.34325489105243	1.0
6.2500e-02	0.00393989210753	2.0	0.17416202237165	1.0
3.1250e-02	9.690564965189616e-004	2.0	0.09024988724017	0.9
1.5625e-02	2.361331321076314e-004	2.0	0.04663207396691	1.0

表 3-5 给出了真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y) + x + y$ 的数值结果. 该真解所对应的重调和方程具非齐次 Dirichlet 和 Neumann 边界值. 数值结果表明 WG 算法 1 的解在 H^2 和 L^2 范数下的收敛阶分别为 $\mathcal{O}(h)$ 和 $\mathcal{O}(h^2)$, 与理论结果一致.

表 3-5 一致三角剖分上真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y) + x + y$ 的数值误差和收敛阶.

h	$\ Q_0 u - u_0\ $	阶	$\ u_h - Q_h u\ $	阶
1	40.97063908362117		80.94178656067376	
5.0000e-01	7.35268733170623	2.5	35.57387445374158	1.2
2.5000e-01	1.90692935294812	1.9	18.93158300113207	0.9
1.2500e-01	0.48719482275770	2.0	9.67726093717857	1.0
6.2500e-02	0.12627122627188	1.9	4.94321519388170	1.0
3.1250e-02	0.03270240233491	1.9	2.52054110558245	1.0
1.5625e-02	0.00835457625297	2.0	1.27502727873947	1.0

3.2 基于 Schur 补矩阵形式的弱有限元方法的数值实验

由于引入了弱函数 $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\}$, 第二章提出的求解重调和方程的 WG 方法适用于任意多边形或多面体正则剖分. 同时, 由于引入了单元边界自由度 v_b, \mathbf{v}_g , WG 方法离散问题的规模相对变大, 从而增加了计算复杂度. 一个自然

的想法是: 是否可以消去内部自由度 v_0 以得到仅依赖于单元边界自由度 v_b 和 \mathbf{v}_g 的 WG 方法的 Schur 补呢? 回答是肯定的! 为此, 本节提出 WG 方法的 Schur 补矩阵形式, 并给出相应的计算结果.

3.2.1 Schur 补矩阵

WG 算法 1 中, 将 (2.4.2) 的左端记作

$$a(u_h, v) = (\partial_w^2 u_h, \partial_w^2 v)_h + s(u_h, v),$$

其中 $u_h = \{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}$, $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\}$. 由于单元内部之间不相交, 故单元内部自由度 u_0 不需对 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和. 通过分解检验函数, (2.4.2) 可改写为

$$\begin{cases} a(\{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}, \{v_0, 0, \mathbf{0}\}) = f(v_0), & \forall v = \{v_0, 0, \mathbf{0}\} \in V_h^0, \\ a(\{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}, \{0, v_b, \mathbf{0}\}) = 0, & \forall v = \{0, v_b, \mathbf{0}\} \in V_h^0, \\ a(\{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}, \{0, 0, \mathbf{v}_g\}) = 0, & \forall v = \{0, 0, \mathbf{v}_g\} \in V_h^0. \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned} & a(\{u_0, 0, \mathbf{0}\}, \{v_0, 0, \mathbf{0}\}) + a(\{0, u_b, \mathbf{0}\}, \{v_0, 0, \mathbf{0}\}) \\ & + a(\{0, 0, \mathbf{u}_g\}, \{v_0, 0, \mathbf{0}\}) = f(v_0), \\ & a(\{u_0, 0, \mathbf{0}\}, \{0, v_b, \mathbf{0}\}) + a(\{0, u_b, \mathbf{0}\}, \{0, v_b, \mathbf{0}\}) \\ & + a(\{0, 0, \mathbf{u}_g\}, \{0, v_b, \mathbf{0}\}) = 0, \\ & a(\{u_0, 0, \mathbf{0}\}, \{0, 0, \mathbf{v}_g\}) + a(\{0, u_b, \mathbf{0}\}, \{0, 0, \mathbf{v}_g\}) \\ & + a(\{0, 0, \mathbf{u}_g\}, \{0, 0, \mathbf{v}_g\}) = 0. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$, $u_0 \in P_2(T)$, 取基函数为二次多项式 $\phi_{0,j,T}(x)$ ($j = 1, \dots, 6$); $u_b \in P_0(e)$, 取基函数为 $\phi_{b,1,T}(x) = (1, 0, 0)'$, $\phi_{b,2,T}(x) = (0, 1, 0)'$, $\phi_{b,3,T}(x) = (0, 0, 1)'$; $\mathbf{u}_g \in [P_0(e)]^2$, 取基函数为 $\phi_{g,1,T}(x) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)'$, $\phi_{g,2,T}(x) = (0, 0, 1, 0, 0, 0)'$, $\phi_{g,3,T}(x) =$

$(0, 0, 0, 0, 1, 0)'$, $\phi_{g,4,T}(x) = (0, 1, 0, 0, 0, 0)'$, $\phi_{g,5,T}(x) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)'$,
 $\phi_{g,6,T}(x) = (0, 0, 0, 0, 0, 1)'$, 则

$$u_0 = \sum_{j=1}^6 u_{0,T,j} \phi_{0,j,T}(x),$$

$$u_b = \sum_{j=1}^3 u_{b,T,j} \phi_{b,j,T}(x),$$

$$\mathbf{u}_g = \sum_{j=1}^6 u_{g,T,j} \phi_{g,j,T}(x).$$

对于 (3.2.1) 的第一个方程,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{j=1}^6 a_T(\{\phi_{0,j,T}, 0, \mathbf{0}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\}) u_{0,T,j} \\
 & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{j=1}^3 a_T(\{0, \phi_{b,j,T}, \mathbf{0}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\}) u_{b,T,j} \\
 & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{j=1}^6 a_T(\{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\}) u_{g,T,j} \\
 & = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} f(\phi_{0,i,T}), \quad i = 1, 2, \dots, 6,
 \end{aligned}$$

相应的矩阵形式为

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (A_T[u_{0,T}] + B_T[u_{b,T}] + C_T[\mathbf{u}_{g,T}]) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [F]_T, \quad (3.2.2)$$

其中,

$$A_T = a_T(\{\phi_{0,j,T}, 0, \mathbf{0}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\})_{6 \times 6},$$

$$B_T = a_T(\{0, \phi_{b,j,T}, \mathbf{0}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\})_{6 \times 3},$$

$$C_T = a_T(\{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\})_{6 \times 6},$$

$$\begin{aligned} [u_{0,T}] &= \begin{pmatrix} u_{0,T,1} \\ \vdots \\ u_{0,T,6} \end{pmatrix}_{6 \times 1}, & [u_{b,T}] &= \begin{pmatrix} u_{b,T,1} \\ \vdots \\ u_{b,T,3} \end{pmatrix}_{3 \times 1}, \\ [\mathbf{u}_{g,T}] &= \begin{pmatrix} u_{g,T,1} \\ \vdots \\ u_{g,T,6} \end{pmatrix}_{6 \times 1}, & [F]_T &= \begin{pmatrix} f(\phi_{0,1,T}) \\ \vdots \\ f(\phi_{0,6,T}) \end{pmatrix}_{6 \times 1}. \end{aligned}$$

类似地, (3.2.1) 第二个方程的矩阵形式为

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(B'_T [u_{0,T}] + E_T [u_{b,T}] + G_T [\mathbf{u}_{g,T}] \right) = 0, \quad (3.2.3)$$

其中,

$$E_T = a_T(\{0, \phi_{b,j,T}, \mathbf{0}\}, \{0, \phi_{b,i,T}, \mathbf{0}\})_{3 \times 3},$$

$$G_T = a_T(\{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \{0, \phi_{b,i,T}, 0\})_{3 \times 6}.$$

同理, (3.2.1) 第三个方程的矩阵形式为

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(C'_T [u_{0,T}] + G'_T [u_{b,T}] + L_T [\mathbf{u}_{g,T}] \right) = 0, \quad (3.2.4)$$

其中,

$$L_T = a_T(\{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \{0, 0, \phi_{g,i,T}\})_{6 \times 6}.$$

这里需要特别指出的是: 由于单元内部之间不相交, 因此在 (3.2.2) 中对 $T \in \mathcal{T}_h$ 的求和可以省略, 亦即在每个单元 T 上, 成立

$$A_T [u_{0,T}] + B_T [u_{b,T}] + C_T [\mathbf{u}_{g,T}] = [F]_T. \quad (3.2.5)$$

但是, 由于 u_b, \mathbf{u}_g 在每条内部边 $e \in \mathcal{E}_h^0$ 的值由以 e 为公共边的两个相邻单元共有, 故在 (3.2.3) 和 (3.2.4) 中对 $T \in \mathcal{T}_h$ 的求和不能省略.

由 (3.2.5),

$$[u_{0,T}] = A_T^{-1}[F]_T - A_T^{-1}B_T[u_{b,T}] - A_T^{-1}C_T[\mathbf{u}_{g,T}]. \quad (3.2.6)$$

将 (3.2.6) 代入 (3.2.3),

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left((E_T - B_T' A_T^{-1} B_T)[u_{b,T}] + (G_T - B_T' A_T^{-1} C_T)[\mathbf{u}_{g,T}] \right) \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} B_T' A_T^{-1} [F]_T. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

将 (3.2.6) 代入 (3.2.4),

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left((G_T' - C_T' A_T^{-1} B_T)[u_{b,T}] + (L_T - C_T' A_T^{-1} C_T)[\mathbf{u}_{g,T}] \right) \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} C_T' A_T^{-1} [F]_T. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

(3.2.7)和 (3.2.8) 相应的矩阵形式为

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \begin{pmatrix} (E_T - B_T' A_T^{-1} B_T) & (G_T - B_T' A_T^{-1} C_T) \\ (G_T' - C_T' A_T^{-1} B_T) & (L_T - C_T' A_T^{-1} C_T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u_{b,T}] \\ \mathbf{u}_{g,T} \end{pmatrix} \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \begin{pmatrix} B_T' A_T^{-1} [F]_T \\ C_T' A_T^{-1} [F]_T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

(3.2.9) 即为 WG 算法 1 的 Schur 补矩阵.

3.2.2 程序实现

本小节给出 WG 算法 1 的基于 Schur 补矩阵形式的计算方法和程序实现的详细过程.

1. 计算单元刚度矩阵

$$\begin{pmatrix} E_T - B'_T A_T^{-1} B_T & G_T - B'_T A_T^{-1} C_T \\ G'_T - C'_T A_T^{-1} B_T & L_T - C'_T A_T^{-1} C_T \end{pmatrix}_{9 \times 9},$$

单元刚度矩阵中各矩阵的具体计算方法和步骤如下:

计算 $A_T = (a_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_T(\{\phi_{0,j,T}, 0, \mathbf{0}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\}) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 (\partial_{ij,w}^2 \{\phi_{0,j,T}, 0, \mathbf{0}\}, \partial_{ij,w}^2 \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\})_T \\ &\quad + h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla \phi_{0,j,T}), Q_b(\nabla \phi_{0,i,T}) \rangle_{\partial T} \\ &\quad + h_T^{-3} \langle Q_b \phi_{0,j,T}, Q_b \phi_{0,i,T} \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

计算 $B_T = (b_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_T(\{0, \phi_{b,j,T}, \mathbf{0}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\}) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 (\partial_{ij,w}^2 \{0, \phi_{b,j,T}, \mathbf{0}\}, \partial_{ij,w}^2 \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\})_T \\ &\quad + h_T^{-3} \langle -\phi_{b,j,T}, Q_b \phi_{0,i,T} \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

计算 $C_T = (c_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_T(\{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\}) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 (\partial_{ij,w}^2 \{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \partial_{ij,w}^2 \{\phi_{0,i,T}, 0, \mathbf{0}\})_T \\ &\quad + h_T^{-1} \langle -\phi_{g,j,T}, Q_b(\nabla \phi_{0,i,T}) \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

计算 $E_T = (e_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned} e_{ij} &= a_T(\{0, \phi_{b,j,T}, \mathbf{0}\}, \{0, \phi_{b,i,T}, 0\}) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 (\partial_{ij,w}^2 \{0, \phi_{b,j,T}, \mathbf{0}\}, \partial_{ij,w}^2 \{0, \phi_{b,i,T}, 0\})_T \\ &\quad + h_T^{-3} \langle -\phi_{b,j,T}, -\phi_{b,i,T} \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

计算 $G_T = (g_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned} g_{ij} &= a_T(\{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \{0, \phi_{b,i,T}, 0\}) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 (\partial_{ij,w}^2 \{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \partial_{ij,w}^2 \{0, \phi_{b,i,T}, 0\})_T. \end{aligned}$$

计算 $L_T = (l_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned} l_{ij} &= a_T(\{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \{0, 0, \phi_{g,i,T}\}) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 (\partial_{ij,w}^2 \{0, 0, \phi_{g,j,T}\}, \partial_{ij,w}^2 \{0, 0, \phi_{g,i,T}\})_T \\ &\quad + h_T^{-1} \langle -\phi_{g,j,T}, -\phi_{g,i,T} \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

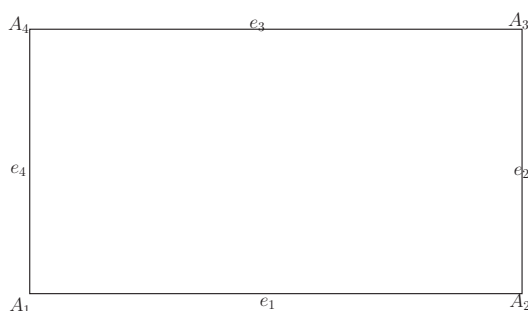
2. 合成总体刚度矩阵, 其规模为 $(9N^2 + 6N) \times (9N^2 + 6N)$, 其中 $h = \frac{1}{N}$.

3. 计算单元荷载向量

$$\begin{pmatrix} -B'_T A_T^{-1} [F]_T \\ -C'_T A_T^{-1} [F]_T \end{pmatrix}_{9 \times 1}.$$

4. 合成总体荷载向量, 其规模为 $(9N^2 + 6N) \times 1$.

5. 根据 WG 算法 1 的 Dirichlet 和 Neumann 边界条件做相应的边界处理, 然后求出解 $[u_{b,T}]$, $[\mathbf{u}_{g,T}]$.

图 3-1 矩形单元 $A_1A_2A_3A_4$.

6. 由 (3.2.6), 计算出每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上的 $[u_{0,T}]$.
7. 计算各种离散误差.

3.2.3 数值计算结果

本小节给出基于 Schur 补矩阵形式的 WG 算法 1 的数值实验结果. 该数值试验基于一致三角剖分和一致矩形剖分, 且取最低阶元 $k = 2$. 表 3-6—表 3-11 给出了一致三角剖分上不同真解对应的数值结果. 表 3-12—表 3-17 给出了一致矩形剖分上不同真解对应的数值结果.

对于矩形单元 $A_1A_2A_3A_4$ (见图 3-1), 设其中心坐标 (x_i^*, y_j^*) , 取 v_0 的一组基函数

$$\phi_{1,0}(x, y) = 1,$$

$$\phi_{2,0}(x, y) = x - x_i^*,$$

$$\phi_{3,0}(x, y) = y - y_j^*,$$

$$\phi_{4,0}(x, y) = (x - x_i^*)^2,$$

$$\phi_{5,0}(x, y) = (y - y_j^*)^2,$$

$$\phi_{6,0}(x, y) = (x - x_i^*)(y - y_j^*).$$

取 v_b 一组基函数 $\phi_{1,b} = (1, 0, 0, 0)'$, $\phi_{2,b} = (0, 1, 0, 0)'$, $\phi_{3,b} = (0, 0, 1, 0)'$, $\phi_{4,b} = (0, 0, 0, 1)'$. 取 \mathbf{v}_g 的一组基函数为 $\phi_{1,g} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$, $\phi_{2,g} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)'$, $\phi_{3,g} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)'$, $\phi_{4,g} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)'$, $\phi_{5,g} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)'$, $\phi_{6,g} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)'$, $\phi_{7,g} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)'$, $\phi_{8,g} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)'$.

表 3-6 给出了一致三角剖分上真解 $u = x^2 + y^2 + xy + x + y + 1$ 的数值结果. 理论上, **WG** 算法 1 对于二次多项式是精确的. 该表显示数值结果与理论一致. 这个例子的主要功能是验证程序的正确性.

表 3-6 一致三角剖分上真解 $u = x^2 + y^2 + xy + x + y + 1$ 对应的数值误差.

h	$\ u_0 - Q_0 u\ $	$\ u_h - Q_h u\ $
1	1.731013782317004e-014	2.034328491416823e-014
5.0000e-01	4.351420126148144e-014	1.876220959263527e-013
2.5000e-01	1.641208580055444e-013	1.602947915513757e-012
1.2500e-01	7.683543087801125e-013	7.683543087801125e-013
6.2500e-02	3.653719397933948e-012	9.916202159486515e-011
3.1250e-02	1.430448859525248e-011	5.197614805478548e-010

表 3-7 一致三角剖分上真解 $u = x^2 + y^2 + xy + x + y + 1$ 对应的数值误差.

h	$\ u_b - Q_b u\ _\infty$	$\ u_g - Q_b(\nabla u)\ _\infty$
1	1.598721155460225e-014	4.440892098500626e-016
5.0000e-01	5.817568649035820e-014	6.661338147750939e-015
2.5000e-01	2.864375403532904e-013	8.437694987151190e-014
1.2500e-01	1.478817068800709e-012	1.185496145694742e-012
6.2500e-02	7.708500504577387e-012	1.343658517782842e-011
3.1250e-02	3.136735315933947e-011	9.332734585143498e-011

表 3-8-3-9 给出了一致三角剖分上真解 $u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ 的数值结果. 该真解所对应的重调和方程具齐次 **Dirichlet** 和 **Neumann** 边界值. 数值结果

表明 WG 算法 1 的解在 H^2 和 L^2 范数下的收敛阶分别为 $\mathcal{O}(h)$ 和 $\mathcal{O}(h^2)$, 与理论结果一致. u 在边集合 \mathcal{E}_h 上的近似解在 L^∞ 范数下的收敛阶是 $\mathcal{O}(h^2)$. 但是 ∇u 在边集合 \mathcal{E}_h 上的近似解在 L^∞ 范数下的收敛阶从数值结果很难确定. 值得指出的是, u_b 和 \mathbf{u}_g 的绝对误差都很小.

表 3-8 一致三角剖分上真解 $u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ 的数值误差和收敛阶.

h	$\ u_0 - Q_0u\ $	阶	$\ u_h - Q_hu\ $	阶
1	0.41325894798926		0.52598134793231	
5.0000e-01	0.07371160477664	2.5	0.31309015394754	0.7
2.5000e-01	0.01985915494645	1.9	0.18972583179809	0.7
1.2500e-01	0.00517619984362	1.9	0.10055695990906	0.9
6.2500e-02	0.00138330553756	1.9	0.05240095759366	0.9
3.1250e-02	3.749938763186332e-004	1.9	0.02729218675799	0.9

表 3-9 一致三角剖分上真解 $u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ 的数值误差和收敛阶.

h	$\ u_b - Q_bu\ _\infty$	阶	$\ \mathbf{u}_g - Q_b(\nabla u)\ _\infty$	阶
1	0.41494319613075		8.648530195900213e-018	
5.0000e-01	0.08806531857191	2.2	0.00941881859537	
2.5000e-01	0.03701393067879	1.3	0.00491550944447	0.9
1.2500e-01	0.01069353874385	1.8	0.00354107268735	0.5
6.2500e-02	0.00292920729299	1.9	0.00222033014770	0.7
3.1250e-02	7.935008119034723e-004	1.9	0.00101897467437	1.1

表 3-10-3-11 给出了一致三角剖分上真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 的数值结果. 该真解所对应的重调和方程具齐次 Dirichlet 和非齐次 Neumann 边界值. 数值结果表明 WG 算法 1 的解在 H^2 和 L^2 范数下的收敛阶分别为 $\mathcal{O}(h)$ 和 $\mathcal{O}(h^2)$, 与理论结果一致. u 在边集合 \mathcal{E}_h 上的近似解在 L^∞ 范数下的收敛阶是 $\mathcal{O}(h^2)$. 但是 ∇u 在边集合 \mathcal{E}_h 上的近似解在 L^∞ 范数下的收敛阶从数值结果很难确定. 值得指出的是, u_b 和 \mathbf{u}_g 的绝对误差都很小.

表 3-10 一致三角剖分上真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 对应的数值误差和收敛阶.

h	$\ u_0 - Q_0 u\ $	阶	$\ u_h - Q_h u\ $	阶
1	40.97063908362131		51.87372137877299	
5.0000e-01	7.35268733170618	2.5	31.42600680431781	0.7
2.5000e-01	1.90692935294809	1.9	18.33556986197423	0.8
1.2500e-01	0.48719482275760	2.0	9.58298415569967	0.9
6.2500e-02	0.12627122627227	1.9	4.92230227440197	1.0
3.1250e-02	0.03270240234848	1.9	2.51341457215226	1.0

表 3-11 一致三角剖分上真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 对应的数值误差和收敛阶.

h	$\ u_b - Q_b u\ _\infty$	阶	$\ u_g - Q_b(\nabla u)\ _\infty$	阶
1	40.92283467601951		1.363556509870529e-015	
5.0000e-01	8.79376884840582	2.2	0.65803168682388	
2.5000e-01	3.42338037611409	1.4	0.40382967358145	0.7
1.2500e-01	0.95954195528841	1.8	0.26569125177185	0.6
6.2500e-02	0.25481566437475	1.9	0.14889909731151	0.8
3.1250e-02	0.06614598725047	1.9	0.06050733349956	1.3

表 3-12-3-13 给出了一致矩形剖分上真解 $u = x^2 + y^2 + xy + x + y + 1$ 的数值结果. 理论上, WG 算法 1 对于二次多项式问题是精确的. 数值实验显示数值结果与理论一致. 此表亦表明了程序的正确性.

表 3-12 一致矩形剖分上真解 $u = x^2 + y^2 + xy + x + y + 1$ 对应的数值误差.

h	$\ u_0 - Q_0 u\ $	$\ u_h - Q_h u\ $
1	2.094817733645731e-015	0
5.0000e-01	2.475077669324458e-015	4.631510279133378e-015
2.5000e-01	4.666795713797244e-015	2.942276501787047e-014
1.2500e-01	1.826782864955263e-014	2.557081391103430e-013
6.2500e-02	9.917452103838106e-014	2.308520893359777e-012
3.1250e-02	8.767691423160327e-013	2.764449113691188e-011

表 3-13 一致矩形剖分上真解 $u = x^2 + y^2 + xy + x + y + 1$ 对应的数值误差.

h	$\ u_b - Q_b u\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_g - Q_b(\nabla u)\ _\infty$
1	0	0
5.0000e-01	2.220446049250313e-015	8.881784197001252e-016
2.5000e-01	6.661338147750939e-015	3.552713678800501e-015
1.2500e-01	3.330669073875470e-014	2.176037128265307e-014
6.2500e-02	1.985078768029780e-013	2.744471316873387e-013
3.1250e-02	1.910027691565119e-012	4.539035813877490e-012

表 3-14-3-15 给出了一致矩形剖分上真解 $u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ 的数值结果. 该真解所对应的重调和方程具齐次 Dirichlet 和 Neumann 边界值. 数值结果表明 WG 算法 1 的解在 H^2 和 L^2 范数下的收敛阶分别为 $\mathcal{O}(h)$ 和 $\mathcal{O}(h^2)$, 与理论结果一致. u 在边集合 \mathcal{E}_h 上的近似解在 L^∞ 范数下的收敛阶是 $\mathcal{O}(h^2)$. 但是 ∇u 在边集合 \mathcal{E}_h 的近似解在 L^∞ 范数下的收敛阶从数值结果很难确定. 值得指出的是, u_b 和 \mathbf{u}_g 的绝对误差都很小.

表 3-14 一致矩形剖分上真解 $u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ 的数值误差和收敛阶.

h	$\ u_0 - Q_0u\ $	阶	$\ u_h - Q_hu\ $	阶
1	1.15052303274794		0	
5.0000e-01	0.14880632713561	3.0	0.35421048021972	
2.5000e-01	0.03786537210364	2.0	0.24649076475574	0.5
1.2500e-01	0.00972420054987	2.0	0.13593564514903	0.9
6.2500e-02	0.00249420182164	2.0	0.07021584962256	1.0
3.1250e-02	6.509372731260055e-004	1.9	0.03598710268512	1.0

表 3-15 一致矩形剖分上真解 $u = x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2$ 的数值误差和收敛阶.

h	$\ u_b - Q_bu\ _\infty$	阶	$\ u_g - Q_b(\nabla u)\ _\infty$	阶
1	0		0	
5.0000e-01	0.15414697975305		0.01343197237944	
2.5000e-01	0.06724744204559	1.2	0.00868102669640	0.6
1.2500e-01	0.01961462292282	1.8	0.00340784543287	1.3
6.2500e-02	0.00518061397426	1.9	0.00145779966297	1.2
3.1250e-02	0.00135937900409	1.9	8.774007339305179e-004	0.7

表 3-16-3-17 给出了一致矩形剖分上真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 的数值结果. 该真解所对应的重调和方程具齐次 Dirichlet 和非齐次 Neumann 边界值. 数值结果表明 WG 算法 1 的解在 H^2 和 L^2 范数下的收敛阶分别为 $\mathcal{O}(h)$ 和 $\mathcal{O}(h^2)$, 与理论结果一致. u 在边集合 \mathcal{E}_h 上的近似解在 L^∞ 范数下的收敛阶是 $\mathcal{O}(h^2)$. 但是 ∇u 在边集合 \mathcal{E}_h 上的近似解在 L^∞ 范数下的收敛阶从数值结果很难确定. 我们特别指出, 本文并未从理论上研究 WG 有限元解的最大模误差估计.

表 3-16 一致矩形剖分上真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 对应的数值误差和收敛阶.

h	$\ u_0 - Q_0 u\ $	阶	$\ u_h - Q_h u\ $	阶
1	1.138181233563997e+002		0	
5.0000e-01	14.67885937917170	3.0	35.00453605608961	
2.5000e-01	3.68522064659670	2.0	24.17494908353661	0.5
1.2500e-01	0.92210493566814	2.0	13.02311464230295	0.9
6.2500e-02	0.23057832406793	2.0	6.63188370129793	1.0
3.1250e-02	0.05764639149107	2.0	3.33108980482068	1.0

表 3-17 一致矩形剖分上真解 $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ 对应的数值误差和收敛阶.

h	$\ u_b - Q_b u\ _\infty$	阶	$\ \mathbf{u}_g - Q_b(\nabla u)\ _\infty$	阶
1	0		0	
5.0000e-01	15.17997598935519		0.07827134656657	
2.5000e-01	6.33478084319226	1.3	0.05581601625211	0.5
1.2500e-01	1.77755779305656	1.8	0.01373219966459	2.0
6.2500e-02	0.45711352289390	2.0	0.00343860270926	2.0
3.1250e-02	0.11508036723417	2.0	8.712167140272342e-004	2.0

关于 WG 方法, 应该做更多的数值试验来进一步验证所建立的收敛性理论, 特别是对于次数 $k > 2$ 的有限元以及在任意二维多边形或三维多面体剖分上的数值试验. 鉴于时间的关系, 这些问题只能留作将来的课题研究.

第4章 重调和方程的杂交弱有限元方法

杂交有限元方法 [1, 14, 20] 的关键思想是引入 Lagrange 乘子以放松有限元函数沿着单元边界的约束, 如连续性. 目前为止, 科学计算工作者们已提出多种杂交混合有限元方法 [1, 3, 10, 11, 20, 43, 49] 和杂交间断 Galerkin (HDG) 有限元方法 [2, 14]. 基于第二章提出的 WG 有限元方法, 本章提出求解重调和方程 (2.2.1) 的杂交 WG (HWG) 有限元方法, 即在 WG 有限元方法中引入定义在单元边界上的 Lagrange 乘子以放松有限元函数在单元之间的约束. 我们建立了 HWG 有限元方法的最优阶误差估计, 并推导一个实用的计算算法 (Schur 补): 即消去单元内部自由度, 生成一个仅依赖于单元边界自由度的规模缩小了的线性方程组. 该算法极大地降低了 WG 有限元方法的矩阵问题的复杂度.

4.1 杂交弱有限元方法

假设 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 的二维多边形或三维多面体正则剖分, 具体见定义 1.4.1. 记 \mathcal{E}_h 为 \mathcal{T}_h 中所有边或面的集合, $\mathcal{E}_h^0 = \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega$ 为 \mathcal{T}_h 中所有内部边或面的集合. 记 h_T 为单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 的大小, $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ 为剖分 \mathcal{T}_h 的网格大小. 弱 Hessian 和离散弱 Hessian 的详细内容可参考本文 2.3 节.

在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上, (2.3.2) 定义的 T 上所有弱函数构成的空间 $\mathcal{W}(T)$ 在边界 ∂T 的迹是通常的 Sobolev 空间 $L^2(\partial T) \times [L^2(\partial T)]^d$. 定义空间 \mathcal{W} 和 Λ 为

$$\mathcal{W} = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{W}(T), \quad \Lambda = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} L^2(\partial T) \times [L^2(\partial T)]^d. \quad (4.1.1)$$

这里要特别强调的是: 假设 $e \in \mathcal{E}_h^0$ 为两个相邻单元 T_1 和 T_2 的公共边或平面, 对于 $v = \{v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}$, v_b 在 e 上有两个值, 一个值是 v 在 $e \subset \partial T_1$ 的值, 一个值是 v 在 $e \subset \partial T_2$ 的值, 这两个值之间没有必然联系. 类似地, \mathbf{v}_g 在 e 上也有两个值: 一个值是 ∇v 在 $e \subset \partial T_1$ 的值, 一个值是 ∇v 在 $e \subset \partial T_2$ 的值, 这两个值之

间也没有必然联系. 对任意的 $v \in \mathcal{W}$, v 在 $e \in \mathcal{E}_h$ 的跳度定义为

$$[[v]]_e = \begin{cases} \{v_b, \mathbf{v}_g\}|_{\partial T_1} - \{v_b, \mathbf{v}_g\}|_{\partial T_2}, & e \in \mathcal{E}_h^0, \\ \{v_b, \mathbf{v}_g\}, & e \subset \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

其中, $\{v_b, \mathbf{v}_g\}|_{\partial T_i}$ 表示 $\{v_b, \mathbf{v}_g\}$ 在边 $e \subset \partial T_i$ ($i = 1, 2$) 上的值. 特别指出的是: 在 (4.1.2) 中, 只要在所有公式中 T_1 和 T_2 的求差顺序一致, T_1 和 T_2 的顺序是非本质的. $\{v_b, \mathbf{v}_g\}|_{\partial T_1}$, $\{v_b, \mathbf{v}_g\}|_{\partial T_2}$ 分别记作 $\{v_b, \mathbf{v}_g\}_L$, $\{v_b, \mathbf{v}_g\}_R$.

对任意的 $\lambda \in \Lambda$, λ 在 $e \in \mathcal{E}_h$ 的相似度定义为

$$\langle\langle\lambda\rangle\rangle_e = \begin{cases} \{ \lambda_b, \boldsymbol{\lambda}_g \}_L + \{ \lambda_b, \boldsymbol{\lambda}_g \}_R, & e \in \mathcal{E}_h^0, \\ \{ \lambda_b, \boldsymbol{\lambda}_g \}, & e \subset \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1.3)$$

记 $\langle\langle\lambda\rangle\rangle$ 为 λ 在 \mathcal{E}_h 的相似度.

给定整数 $k \geq 2$, (2.4.1) 定义了离散弱函数空间 $\mathcal{W}_k(T)$. $\mathcal{W}_k(T)$ 在边界 ∂T 的迹记作 $\Lambda_k(\partial T)$, 定义为

$$\Lambda_k(\partial T) = \{ \lambda = \{ \lambda_b, \boldsymbol{\lambda}_g \} : \lambda_b|_e \in P_{k-2}(e), \boldsymbol{\lambda}_g|_e \in [P_{k-2}(e)]^d, e \subset \partial T \}. \quad (4.1.4)$$

由此, 定义弱有限元空间 \mathcal{W}_h 和 Λ_h 为

$$\mathcal{W}_h = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} \mathcal{W}_k(T), \quad \Lambda_h = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} \Lambda_k(\partial T). \quad (4.1.5)$$

函数在边界取 0 的 \mathcal{W}_h 的子空间记作 \mathcal{W}_h^0 , 即

$$\mathcal{W}_h^0 = \{ v \in \mathcal{W}_h : v_b|_e = 0, \mathbf{v}_g|_e = \mathbf{0}, e \subset \partial\Omega \}.$$

沿着所有内部边或平面连续的 \mathcal{W}_h 的子空间记作 \mathcal{V}_h , 即

$$\mathcal{V}_h = \{ v \in \mathcal{W}_h : [[v]]_e = \{0, \mathbf{0}\}, e \in \mathcal{E}_h^0 \}.$$

函数在边界取 0 的 \mathcal{V}_h 子空间记作 \mathcal{V}_h^0 , 即

$$\mathcal{V}_h^0 = \{v \in \mathcal{V}_h : v_b|_e = 0, \mathbf{v}_g|_e = \mathbf{0}, e \subset \partial\Omega\}.$$

沿着所有边或平面相似度为 0 的 Λ_h 的子空间记作 Ξ_h , 即

$$\Xi_h = \left\{ \lambda \in \Lambda_h : \langle\langle \lambda \rangle\rangle_e = \{0, \mathbf{0}\}, e \in \mathcal{E}_h \right\}.$$

在杂交有限元方法中, 通常称空间 Ξ_h 为 **Lagrange** 乘子空间.

在每个单元 T 上, 记 Q_0 为到 $P_k(T)$ 的 L^2 投影. 在每条边或平面 $e \subset \partial T$ 上, 记 Q_b 为到 $P_{k-2}(e)$ 或 $[P_{k-2}(e)]^d$ 的 L^2 投影. 对任意的 $q \in H^2(\Omega)$, 定义到弱有限元空间 \mathcal{V}_h 的投影 $Q_h q$, 使得在每个单元 T 上,

$$Q_h q = \{Q_0 q, Q_b q, Q_b(\nabla q)\}.$$

对任意的 $w = \{w_0, w_b, \mathbf{w}_g\} \in \mathcal{W}_k(T)$, $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_k(T)$, $\lambda \in \Lambda_k(\partial T)$, 记

$$a_T(w, v) = \sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij,w}^2 w, \partial_{ij,w}^2 v)_T,$$

$$\begin{aligned} s_T(w, v) &= h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla w_0) - \mathbf{w}_g, Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g \rangle_{\partial T} \\ &\quad + h_T^{-3} \langle Q_b w_0 - w_b, Q_b v_0 - v_b \rangle_{\partial T}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_T(v, \lambda) &= \langle v, \lambda \rangle_{\partial T} \\ &= \langle v_b, \lambda_b \rangle_{\partial T} + \langle \mathbf{v}_g, \boldsymbol{\lambda}_g \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

定义

$$a_{s,T}(w, v) = a_T(w, v) + s_T(w, v).$$

对所有单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和, 得到四个双线性形式:

$$a(w, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(w, v), \quad w, v \in \mathcal{W}_h,$$

$$s(w, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} s_T(w, v), \quad w, v \in \mathcal{W}_h,$$

$$b(v, \lambda) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} b_T(v, \lambda), \quad v \in \mathcal{W}_h, \lambda \in \Lambda_h,$$

$$a_s(w, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_{s,T}(w, v), \quad w, v \in \mathcal{W}_h.$$

对任意的 $\lambda \in \Xi_h$, 由 Lagrange 乘子空间 Ξ_h 的定义知, 在所有的内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$, $\lambda_L + \lambda_R = 0$; 在边界边 $e \subset \partial\Omega$, $\lambda = 0$. 因此, 对任意的 $v \in \mathcal{W}_h$, $\lambda \in \Xi_h$,

$$b(v, \lambda) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \langle \llbracket v \rrbracket_e, \lambda_L \rangle_e. \quad (4.1.6)$$

基于第二章提出的 WG 算法 (2.4.2), 通过引入 Lagrange 乘子, 我们提出求解重调和方程 (2.2.1) 的杂交 WG (HWG) 有限元方法.

弱 Galerkin 算法2. 求 $(u_h; \lambda_h) \in \mathcal{W}_h \times \Xi_h$, 使得在 $\partial\Omega$, $u_b = Q_b g$, $\mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} = Q_b g_n$, $\mathbf{u}_g \cdot \boldsymbol{\tau} = Q_b(\nabla g \cdot \boldsymbol{\tau})$, 且满足

$$a_s(u_h, v) - b(v, \lambda_h) = (f, v_0), \quad \forall v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_h^0, \quad (4.1.7)$$

$$b(u_h, \rho) = 0, \quad \forall \rho \in \Xi_h. \quad (4.1.8)$$

本节余下部分讨论弱有限元方法和杂交弱有限元方法之间的关系. 杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 与 WG 算法 (2.4.2) 等价, 即杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的解 u_h 和 WG 算法 (2.4.2) 的解 \bar{u}_h 相等. 但是杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 比 WG 算法 (2.4.2) 更适合于求解重调和界面问题.

对任意 $v \in \mathcal{V}_h^0$, 定义

$$\|v\| = a_s^{\frac{1}{2}}(v, v). \quad (4.1.9)$$

由引理 2.4.1, (4.1.9) 定义了线性空间 \mathcal{V}_h^0 中的一个范数.

定理4.1.1. 假设 $u_h \in \mathcal{W}_h$ 为杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 解的第一个分量. 那么, 在所有内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$ 上, $[[u_h]]_e = 0$, 也即 $u_h \in \mathcal{V}_h$; 在 $\partial\Omega$ 上, $u_b = Q_b g$, $\mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} = Q_b g_n$, $\mathbf{u}_g \cdot \boldsymbol{\tau} = Q_b(\nabla g \cdot \boldsymbol{\tau})$; 且 u_h 满足方程 (2.4.2). 因此, $u_h = \bar{u}_h$.

证明 假设 e 为两个单元 T_1 和 T_2 的公共边或平面. 考虑 (4.1.8), 在 $e \subset \partial T_1$ 上取 $\rho = [[u_h]]_e$ (也即在 $e \subset \partial T_2$ 上取 $\rho = -[[u_h]]_e$), 否则取 $\rho = 0$. 由 (4.1.6),

$$0 = b(u_h, \rho) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle u_h, \rho \rangle_{\partial T} = \int_e [[u_h]]_e^2 ds,$$

从而, 在所有的内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$ 上, $[[u_h]]_e = 0$.

在 (4.1.7) 中, 令 $v \in \mathcal{V}_h^0$, 由 $b(v, \lambda_h) = 0$,

$$a_s(u_h, v) = (f, v_0) \quad \forall v \in \mathcal{V}_h^0,$$

此即为 (2.4.2). 由定理 2.4.1 知, (2.4.2) 的解存在唯一, 因此, $u_h \equiv \bar{u}_h$. 定理得证. \square

4.2 稳定性条件

对任意的 $\lambda_h \in \Xi_h$, 定义

$$\|\lambda_h\|_{\Xi_h} = \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^3 \|\lambda_b\|_e^2 + h_e \|\boldsymbol{\lambda}_g\|_e^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2.1)$$

易证 $\|\lambda_h\|_{\Xi_h}$ 定义了有限元空间 Ξ_h 中的一个范数.

对任意的 $v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_h^0$, 定义

$$\|v\|_{\mathcal{W}_h^0} = \left(\|v\|^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-3} \|[[v_b]]_e\|_e^2 + h_e^{-1} \|[[\mathbf{v}_g]]_e\|_e^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2.2)$$

则 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_h^0}$ 定义了有限元空间 \mathcal{W}_h^0 中的一个范数. 我们仅需证明 $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_h^0}$ 的正定性. 假设存在某个 $v \in \mathcal{W}_h^0$, 使得 $\|v\|_{\mathcal{W}_h^0} = 0$, 则在所有的内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$, $[[v_b]]_e = 0$, $[[\mathbf{v}_g]]_e = \mathbf{0}$, 即 $v \in \mathcal{V}_h^0$. 由引理 2.4.1 知, $||| \cdot |||$ 定义了线性空间 \mathcal{V}_h^0 中的一个范数, 故 $v = 0$.

引理4.2.1. (有界性) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$|a_s(u, v)| \leq C \|u\|_{\mathcal{W}_h^0} \|v\|_{\mathcal{W}_h^0}, \quad \forall u, v \in \mathcal{W}_h^0, \quad (4.2.3)$$

$$|b(v, \lambda)| \leq C \|v\|_{\mathcal{W}_h^0} \|\lambda\|_{\Xi_h}, \quad \forall v \in \mathcal{W}_h^0, \lambda \in \Xi_h. \quad (4.2.4)$$

证明 为证明 (4.2.3), 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned} |a_s(u, v)| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij,w}^2 u, \partial_{ij,w}^2 v)_T + h_T^{-1} \langle Q_b(\nabla u_0) - \mathbf{u}_g, Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g \rangle_{\partial T} \right. \\ &\quad \left. + h_T^{-3} \langle Q_b u_0 - u_b, Q_b v_0 - v_b \rangle_{\partial T} \right| \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \|\partial_{ij,w}^2 u\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \|\partial_{ij,w}^2 v\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_b(\nabla u_0) - \mathbf{u}_g\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_b(\nabla v_0) - \mathbf{v}_g\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_b u_0 - u_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|Q_b v_0 - v_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|u\|_{\mathcal{W}_h^0} \|v\|_{\mathcal{W}_h^0}. \end{aligned}$$

下证 (4.2.4), 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|b(v, \lambda)| = \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle v_b, \lambda_b \rangle_{\partial T} + \langle \mathbf{v}_g, \boldsymbol{\lambda}_g \rangle_{\partial T} \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \langle \llbracket v_b \rrbracket, \lambda_b \rangle_e + \langle \llbracket \mathbf{v}_g \rrbracket, \boldsymbol{\lambda}_g \rangle_e \right| \\
 &\leq \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-3} \|\llbracket v_b \rrbracket\|_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^3 \|\lambda_b\|_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-1} \|\llbracket \mathbf{v}_g \rrbracket\|_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e \|\boldsymbol{\lambda}_g\|_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \|v\|_{\mathcal{W}_h^0} \|\boldsymbol{\lambda}\|_{\Xi_h}.
 \end{aligned}$$

引理得证. \square

引理4.2.2. (强制性) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$a_s(v, v) \geq C \|v\|_{\mathcal{W}_h^0}^2, \quad \forall v \in \mathcal{V}_h^0. \quad (4.2.5)$$

证明 对任意的 $v \in \mathcal{V}_h^0$, $\|v\|_{\mathcal{W}_h^0} = \|\llbracket v \rrbracket\|$. 取 $C = 1$, (4.2.5) 得证. \square

引理4.2.3. (inf-sup 条件) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_{v \in \mathcal{W}_h^0} \frac{b(v, \sigma)}{\|v\|_{\mathcal{W}_h^0}} \geq C \|\sigma\|_{\Xi_h}, \quad \forall \sigma \in \Xi_h. \quad (4.2.6)$$

证明 对任意的 $\sigma \in \Xi_h$, 由 Lagrange 乘子空间 Ξ_h 的定义知, 对任意的 $e \in \mathcal{E}_h$, $\langle \sigma \rangle_e = 0$. 也即在所有的内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$, $\sigma^L + \sigma^R = 0$; 在边界边 $e \subset \partial\Omega$, $\sigma = 0$. 取 $v = \{0, h_e^3 \sigma_b, h_e \boldsymbol{\sigma}_g\} \in \mathcal{W}_h^0$,

$$\begin{aligned}
 b(v, \sigma) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \langle v_b^L, \sigma_b^L \rangle_e + \langle v_b^R, \sigma_b^R \rangle_e + \langle \mathbf{v}_g^L, \boldsymbol{\sigma}_g^L \rangle_e + \langle \mathbf{v}_g^R, \boldsymbol{\sigma}_g^R \rangle_e \\
 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \langle v_b^L - v_b^R, \sigma_b^L \rangle_e + \langle \mathbf{v}_g^L - \mathbf{v}_g^R, \boldsymbol{\sigma}_g^L \rangle_e \\
 &= 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^3 \|\sigma_b\|_e^2 + h_e \|\boldsymbol{\sigma}_g\|_e^2,
 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

且

$$\begin{aligned}
 s(v, v) &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-1} h_e^2 \|\sigma_g^L\|_e^2 + h_e^{-3} h_e^6 \|\sigma_b^L\|_e^2 \\
 &\quad + h_e^{-1} h_e^2 \|\sigma_g^R\|_e^2 + h_e^{-3} h_e^6 \|\sigma_b^R\|_e^2 \\
 &= 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e \|\sigma_g\|_e^2 + h_e^3 \|\sigma_b\|_e^2.
 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

由 (2.3.4), Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10) 以及逆不等式 (1.4.23),

$$\begin{aligned}
 &(\partial_{ij,w}^2 v, \partial_{ij,w}^2 v)_T \\
 &= \sum_{e \in \partial T} -\langle v_b^*, \partial_j(\partial_{ij,w}^2 v) \cdot n_i \rangle_e + \langle v_{gi}^* \cdot n_j, \partial_{ij,w}^2 v \rangle_e \\
 &\leq \sum_{e \in \partial T} h_e^3 \|\sigma_b^*\|_e \|\partial_j(\partial_{ij,w}^2 v)\|_e + h_e \|\sigma_{gi}^*\|_e \|\partial_{ij,w}^2 v\|_e \\
 &\leq C \sum_{e \in \partial T} h_e^3 \|\sigma_b^*\|_e h_e^{-3/2} \|\partial_{ij,w}^2 v\|_T + h_e \|\sigma_{gi}^*\|_e h_e^{-1/2} \|\partial_{ij,w}^2 v\|_T \\
 &= C \sum_{e \in \partial T} \|\partial_{ij,w}^2 v\|_T \left(h_e^{\frac{3}{2}} \|\sigma_b^*\|_e + h_e^{\frac{1}{2}} \|\sigma_{gi}^*\|_e \right),
 \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

其中, 根据 v_b 和 e 的相对位置, 取 v_b^* 为 v_b^L 或 v_b^R , v_{gi}^* , σ_b^* , σ_{gi}^* 的取法与 v_b^* 相同, 从而

$$\|\partial_{ij,w}^2 v\|_T \leq C \sum_{e \in \partial T} h_e^{\frac{3}{2}} \|\sigma_b^*\|_e + h_e^{\frac{1}{2}} \|\sigma_{gi}^*\|_e. \tag{4.2.10}$$

对所有单元 T 求和,

$$(\partial_w^2 v, \partial_w^2 v)_h \leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \sum_{i=1}^d \left(h_e^3 \|\sigma_b^*\|_e^2 + h_T \|\sigma_{gi}^*\|_e^2 \right). \tag{4.2.11}$$

由 (4.2.8), (4.2.11)

$$\|v\|^2 \leq C \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^3 \|\sigma_b\|_e^2 + h_e \|\sigma_g\|_e^2 = C \|\sigma\|_{\Xi_h}^2. \quad (4.2.12)$$

注意 $\sigma^L + \sigma^R = 0$. 因此,

$$\begin{aligned} h_e^{-3} \|[v_b]\|_e^2 + h_e^{-1} \|[v_g]\|_e^2 &= h_e^{-3} \|v_b^L - v_b^R\|_e^2 + h_e^{-1} \|\mathbf{v}_g^L - \mathbf{v}_g^R\|_e^2 \\ &= h_e^{-3} \|h_e^3 \sigma_b^L - h_e^3 \sigma_b^R\|_e^2 + h_e^{-1} \|h_e \sigma_g^L - h_e \sigma_g^R\|_e^2 \\ &= 2h_e^3 \|\sigma_b\|_e^2 + 2h_e \|\sigma_g\|_e^2. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

由 (4.2.7), (4.2.12), (4.2.13), (4.2.2),

$$\begin{aligned} \sup_{v \in \mathcal{W}_h^0} \frac{b(v, \sigma)}{\|v\|_{\mathcal{W}_h^0}} &\geq C \frac{\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^3 \|\sigma_b\|_e^2 + h_e \|\sigma_g\|_e^2}{(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^3 \|\sigma_b\|_e^2 + h_e \|\sigma_g\|_e^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\geq C \|\sigma\|_{\Xi_h}, \end{aligned}$$

引理得证. \square

4.3 误差方程

假设 u 和 $(u_h; \lambda_h) \in \mathcal{W}_h \times \Xi_h$ 分别为重调和方程 (2.2.1) 和杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的解. 在内部边或平面集合 \mathcal{E}_h^0 , 定义 $\lambda = \{\lambda_b, \lambda_g\}$ 为

$$\lambda_b = \partial_n(\Delta u), \quad \lambda_g = -\partial_n(\nabla u).$$

定义误差函数

$$e_h = Q_h u - u_h, \quad \epsilon_h = Q_h \lambda - \lambda_h. \quad (4.3.1)$$

引理4.3.1. 假设 u 和 $(u_h; \lambda_h) \in \mathcal{W}_h \times \Xi_h$ 分别为重调和方程 (2.2.1) 和杂交 WG

算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的解. 误差函数 e_h 和 ϵ_h 满足方程组

$$a_s(e_h, v) + b(v, \epsilon_h) = \ell_u(v), \quad \forall v \in \mathcal{W}_h^0 \quad (4.3.2)$$

$$b(\epsilon_h, \rho) = 0, \quad \forall \rho \in \Xi_h, \quad (4.3.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \ell_u(v) = & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\ & - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T} \\ & + s(\mathcal{Q}_h u, v). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

证明 由 ϵ_h 的定义知, (4.3.3) 显然成立. 以下证明 (4.3.2). 为此, 由 (2.3.5), 对任意的 $\varphi \in P_{k-2}(T)$,

$$(\varphi, \partial_{ij,w}^2 v)_T = (\partial_{ij}^2 v_0, \varphi)_T + \langle v_0 - v_b, \partial_j \varphi \cdot n_i \rangle_{\partial T} - \langle (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j, \varphi \rangle_{\partial T}.$$

取 $\varphi = \partial_{ij,w}^2 \mathcal{Q}_h u$, 由引理 2.5.1,

$$\begin{aligned} & (\partial_{ij,w}^2 \mathcal{Q}_h u, \partial_{ij,w}^2 v)_T \\ = & (\partial_{ij}^2 v_0, \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u))_T + \langle v_0 - v_b, \partial_j(\mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u)) \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\ & - \langle (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j, \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u) \rangle_{\partial T} \\ = & (\partial_{ij}^2 v_0, \partial_{ij}^2 u)_T + \langle v_0 - v_b, \partial_j(\mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u)) \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\ & - \langle (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j, \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u) \rangle_{\partial T}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 (\partial_{ij}^2 u, \partial_{ij}^2 v_0)_T &= (\partial_{ij,w}^2(Q_h u), \partial_{ij,w}^2 v)_T - \langle v_0 - v_b, \partial_j(\mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u)) \cdot n_i \rangle_{\partial T} \\
 &\quad + \langle (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j, \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u) \rangle_{\partial T}.
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

由 $\lambda_b = \partial_n(\Delta u)$, $\lambda_g = -\partial_n(\nabla u)$,

$$\begin{aligned}
 b(Q_h \lambda, v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle Q_h \lambda, v \rangle_{\partial T} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \lambda, v \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \lambda_g, \mathbf{v}_g \rangle_{\partial T} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \lambda_b, v_b \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle -\partial_{ij}^2 u \cdot n_j, v_{gi} \rangle_{\partial T} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_b \rangle_{\partial T}.
 \end{aligned}$$

由分部积分,

$$(\partial_{ij}^2 u, \partial_{ij}^2 v_0)_T = ((\partial_{ij}^2)^2 u, v_0)_T + \langle \partial_{ij}^2 u, \partial_i v_0 \cdot n_j \rangle_{\partial T} - \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 \rangle_{\partial T}.$$

对所有 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和, 由 $(\Delta^2 u, v_0) = (f, v_0)$,

$$\begin{aligned}
 b(Q_h \lambda, v) &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d (\partial_{ij}^2 u, \partial_{ij}^2 v_0)_T = (f, v_0) \\
 &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u, (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\
 &- \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T}.
 \end{aligned}$$

由上式以及 (4.3.5),

$$b(Q_h \lambda, v) + (\partial_w^2 Q_h u, \partial_w^2 v)_h$$

$$\begin{aligned}
 &= (f, v_0) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\
 &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T}.
 \end{aligned}$$

上式两端分别加上 $s(Q_h u, v)$,

$$\begin{aligned}
 &(\partial_w^2 Q_h u, \partial_w^2 v)_h + s(Q_h u, v) + b(Q_h \lambda, v) = (f, v_0) \\
 &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h(\partial_{ij}^2 u), (\partial_i v_0 - v_{gi}) \cdot n_j \rangle_{\partial T} \\
 &- \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i,j=1}^d \langle \partial_j(\partial_{ij}^2 u - \mathcal{Q}_h \partial_{ij}^2 u) \cdot n_i, v_0 - v_b \rangle_{\partial T} + s(Q_h u, v).
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

(4.3.6) 减去 (4.1.7), (4.3.2) 得证. 引理得证. \square

4.4 误差估计

由误差方程 (4.3.2)-(4.3.3),

$$\begin{aligned}
 a_s(Q_h u - u_h, v) + b(v, Q_h \lambda - \lambda_h) &= \ell_u(v), \quad \forall v \in \mathcal{W}_h^0, \\
 b(Q_h u - u_h, \rho) &= 0, \quad \forall \rho \in \Xi_h,
 \end{aligned}$$

其中 $\ell_u(v)$ 由 (4.3.4) 给出. 上述问题为鞍点问题. 本节将基于 Brezzi 定理 1.3.6 [10] 来分析鞍点问题的稳定性和可解性. 注意到 Brezzi 定理 1.3.6 中的条件已在本文 4.3 节中验证 (见引理 4.2.1-4.2.3).

定理4.4.1. 假设 u 和 $(u_h; \lambda_h) \in \mathcal{W}_h \times \Xi_h$ 分别为重调和方程 (2.2.1) 和杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的解. 存在常数 C , 使得

$$\|Q_h u - u_h\|_{\mathcal{W}_h^0} + \|Q_h \lambda - \lambda_h\|_{\Xi_h} \leq Ch^{k-1} \left(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4 \right). \tag{4.4.1}$$

证明 由 Brezzi 定理 1.3.6 [10],

$$\|Q_h u - u_h\|_{\mathcal{W}_h^0} + \|Q_h \lambda - \lambda_h\|_{\Xi_h} \leq C \|\ell_u\|_{\mathcal{W}_h^{0'}}. \quad (4.4.2)$$

对任意的 $v \in \mathcal{W}_h^0$, 由引理 2.8.1-2.8.2 知,

$$|\ell_u(v)| \leq Ch^{k-1} \left(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4 \right) \|v\|.$$

因此,

$$\|\ell_u\|_{\mathcal{W}_h^{0'}} = \sup_{v \in \mathcal{W}_h^0} \frac{\ell_u(v)}{\|v\|_{\mathcal{W}_h^0}} \leq \sup_{v \in \mathcal{W}_h^0} \frac{\ell_u(v)}{\|v\|} \leq Ch^{k-1} \left(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4 \right). \quad (4.4.3)$$

将 (4.4.3) 代入 (4.4.2), (4.4.1) 得证. 定理得证. \square

定理4.4.2. 假设 u 和 $\lambda_h = \{\lambda_{h,b}, \lambda_{h,g}\} \in \Xi_h$ 分别为重调和方程 (2.2.1) 的解和杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 解的一部分. 在内部边或平面集合 \mathcal{E}_h^0 , $\lambda = \{\lambda_b, \lambda_g\}$ 定义为

$$\lambda_b = \partial_n(\Delta u), \quad \lambda_g = -\partial_n(\nabla u).$$

存在常数 C , 使得

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{\Xi_h} \leq Ch^{k-1} \left(\|u\|_{k+1} + \delta_{k,2} \|u\|_4 \right).$$

证明 由三角不等式,

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{\Xi_h} \leq \|\lambda - Q_h \lambda\|_{\Xi_h} + \|Q_h \lambda - \lambda_h\|_{\Xi_h}. \quad (4.4.4)$$

(4.4.4) 右端第二项由 (4.4.1) 估计. 对于 (4.4.4) 右端第一项,

$$\begin{aligned}
 \|\lambda - Q_h \lambda\|_{\Xi_h}^2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^3 \|\lambda_b - Q_b \lambda\|_e^2 + h_e \|\lambda_g - Q_b \lambda_g\|_e^2 \\
 &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^3 \|\partial_n \Delta u - Q_b(\partial_n \Delta u)\|_e^2 \\
 &\quad + h_e \|\partial_n \nabla u - Q_b(\partial_n \nabla u)\|_e^2.
 \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

假设 e 为单元 T 的边, 记 Q_{k-1} 为到 $P_{k-1}(T)$ 的 L^2 投影. 由迹不等式 (1.4.10),

$$\begin{aligned}
 &\|\partial_n \Delta u - Q_b(\partial_n \Delta u)\|_e^2 \\
 &\leq \|\partial_n \Delta u - \partial_n(Q_{k-1} \Delta u)\|_e^2 \\
 &\leq Ch^{-1} \|\Delta u - Q_{k-1} \Delta u\|_{1,T}^2 + Ch \|\Delta u - Q_{k-1} \Delta u\|_{2,T}^2 \\
 &\leq Ch^{2k-5} \|u\|_{k+1,T}^2 + Ch \delta_{k,2} \|u\|_{4,T}^2.
 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 &\|\partial_n \nabla u - Q_b(\partial_n \nabla u)\|_e^2 \\
 &\leq \|\partial_n \nabla u - \partial_n(Q_{k-1} \nabla u)\|_e^2 \\
 &\leq Ch^{-1} \|\nabla u - Q_{k-1} \nabla u\|_{1,T}^2 + Ch \|\nabla u - Q_{k-1} \nabla u\|_{2,T}^2 \\
 &\leq Ch^{2k-3} \|u\|_{k+1,T}^2.
 \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

将 (4.4.6), (4.4.7) 代入 (4.4.5),

$$\|\lambda - Q_h \lambda\|_{\Xi_h}^2 \leq Ch^{2k-2} (\|u\|_{k+1}^2 + Ch^2 \delta_{k,2} \|u\|_4^2).$$

定理得证. \square

4.5 变量消去法的有效实施

WG 算法 (2.4.2) 的自由度分为两类: (1) 内部自由度 u_0 , (2) 单元边界自由度 $\{u_b, \mathbf{u}_g\}$. 由于引入了 Lagrange 乘子 λ_h , 杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的自由度增加. 因此, WG 算法 (2.4.2) 或杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的离散系统的规模相当大. 基于杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8), 本节提出 WG 算法 (2.4.2) 的 Schur 补形式. 该方法消去内部自由度 u_0 , 生成一个仅含单元边界自由度 $\{u_b, \mathbf{u}_g\}$ 的规模大为缩小的线性方程组.

4.5.1 变量消去法的理论

记 \mathcal{B}_h 为弱有限元空间 \mathcal{V}_h 限制在边集合 \mathcal{E}_h 的界面有限元空间, 即

$$\mathcal{B}_h = \{\{\mu_b, \boldsymbol{\mu}_g\} : \mu_b \in P_{k-2}(e), \boldsymbol{\mu}_g \in [P_{k-2}(e)]^d, e \in \mathcal{E}_h\}.$$

\mathcal{B}_h 为 Hilbert 空间, 对任意的 $\{w_b, \mathbf{w}_g\}, \{q_b, \mathbf{q}_g\} \in \mathcal{B}_h$, 装备内积

$$\langle \{w_b, \mathbf{w}_g\}, \{q_b, \mathbf{q}_g\} \rangle_{\mathcal{E}_h} = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \langle w_b, q_b \rangle_e + \langle \mathbf{w}_g, \mathbf{q}_g \rangle_e.$$

记 \mathcal{B}_h^0 为函数在边界取 0 的 \mathcal{B}_h 的子空间.

引入算子 $S_f : \mathcal{B}_h \rightarrow \mathcal{B}_h^0$, 使得对任意的 $\{w_b, \mathbf{w}_g\} \in \mathcal{B}_h$, $S_f(\{w_b, \mathbf{w}_g\}) \in \mathcal{B}_h^0$ 的具体计算步骤为:

步 1. 在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$, 求解

$$a_{s,T}(w_h, v) = (f, v)_T, \quad \forall v = \{v_0, 0, \mathbf{0}\} \in \mathcal{W}_k(T), \quad (4.5.1)$$

得到 w_0 . 这里, $w_h = \{w_0, w_b, \mathbf{w}_g\} \in \mathcal{W}_k(T)$. 记 $w_0 = D_f(\{w_b, \mathbf{w}_g\})$.

步 2. 在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$, 求解

$$b_T(v, \zeta_{h,T}) = a_{s,T}(w_h, v), \quad \forall v = \{0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_k(T), \quad (4.5.2)$$

得到 $\zeta_{h,T} \in \Lambda_k(\partial T)$, 从而 $\zeta_h \in \Lambda_h$. 记 $\zeta_h = L_f(\{w_b, \mathbf{w}_g\})$.

步 3. 取

$$S_f(\{w_b, \mathbf{w}_g\}) = \begin{cases} \zeta_{hL} + \zeta_{hR}, & \text{在 } e \in \mathcal{E}_h^0, \\ 0, & \text{在 } e \subset \partial\Omega. \end{cases}$$

(4.5.1) 和 (4.5.2) 相加,

$$b_T(v, \zeta_{h,T}) = a_{s,T}(w_h, v) - (f, v_0)_T, \quad \forall v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_k(T).$$

由叠加性质, 我们得到如下结论.

引理4.5.1. 对任意的 $\{w_b, \mathbf{w}_g\} \in \mathcal{B}_h$, 成立

$$S_f(\{w_b, \mathbf{w}_g\}) = S_0(\{w_b, \mathbf{w}_g\}) + S_f(\{0, \mathbf{0}\}). \quad (4.5.3)$$

这里 S_0 为相应于 $f = 0$ 的算子. 易知 S_0 为从 \mathcal{B}_h 到 \mathcal{B}_h^0 的线性映射.

定理4.5.1. 对任意的 $\{w_b, \mathbf{w}_g\}, \{q_b, \mathbf{q}_g\} \in \mathcal{B}_h^0$, 成立

$$\langle S_0(\{w_b, \mathbf{w}_g\}), \{q_b, \mathbf{q}_g\} \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = a_s(w_h, q_h),$$

其中, $w_h = \{D_0(\{w_b, \mathbf{w}_g\}), w_b, \mathbf{w}_g\}$, $q_h = \{D_0(\{q_b, \mathbf{q}_g\}), q_b, \mathbf{q}_g\}$. 即当限定在子空间 \mathcal{B}_h^0 时, 线性映射 S_0 对称正定.

证明 对任意的 $\{w_b, \mathbf{w}_g\}, \{q_b, \mathbf{q}_g\} \in \mathcal{B}_h^0$, 令

$$w_h = \{D_0(\{w_b, \mathbf{w}_g\}), w_b, \mathbf{w}_g\}, \quad \zeta_h = L_0(\{w_b, \mathbf{w}_g\}),$$

$$q_h = \{D_0(\{q_b, \mathbf{q}_g\}), q_b, \mathbf{q}_g\}, \quad \eta_h = L_0(\{q_b, \mathbf{q}_g\}).$$

在 (4.5.1) 中取 $f = 0$,

$$\begin{aligned}
 \langle S_0(\{w_b, \mathbf{w}_g\}), \{q_b, \mathbf{q}_g\} \rangle_{\mathcal{E}_h^0} &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \langle \langle \zeta_h \rangle \rangle_e, \{q_b, \mathbf{q}_g\} \rangle_e \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \zeta_{h,T}, \{q_b, \mathbf{q}_g\} \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} b_T(q_h, \zeta_{h,T}) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_{s,T}(w_h, q_h),
 \end{aligned}$$

定理得证. \square

引理4.5.2. 假设 $(u_h; \lambda_h) = (\{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}; \lambda_h) \in \mathcal{W}_h \times \Xi_h$ 为杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的唯一解. 那么, $u_h \in \mathcal{V}_h$, $\{u_b, \mathbf{u}_g\}$ 在空间 \mathcal{B}_h 有定义, 且满足

$$S_f(\{u_b, \mathbf{u}_g\}) = \{0, \mathbf{0}\}.$$

证明 由于 $(u_h; \lambda_h)$ 是杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的唯一解, 由定理 4.1.1, 在所有的内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$, $\llbracket u_h \rrbracket_e = 0$; 在边界边 $e \subset \partial\Omega$, $u_b = Q_b g$, $\mathbf{u}_g \cdot \mathbf{n} = Q_b g_n$, $\mathbf{u}_g \cdot \boldsymbol{\tau} = Q_b(\nabla g \cdot \boldsymbol{\tau})$. 因此, $u_h \in \mathcal{V}_h$, 且 u_h 在 \mathcal{E}_h 上的限制在空间 \mathcal{B}_h 中有定义.

在 (2.4.2) 中, 在 T 上取 $v = \{v_0, 0, \mathbf{0}\} \in \mathcal{W}_k(T)$, 否则取 0,

$$a_{s,T}(u_h, v) = (f, v_0)_T, \quad \forall v = \{v_0, 0, \mathbf{0}\} \in \mathcal{W}_k(T),$$

从而, u_h 满足 (4.5.1).

在 (2.4.2) 中, 在 T 上取 $v = \{0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_k(T)$, 否则取 0,

$$b_T(\lambda_{h,T}, v) = a_{s,T}(u_h, v), \quad \forall v = \{0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_k(T),$$

其中, $\lambda_{h,T}$ 为 λ_h 在 T 的边界上的限制. 从而, λ_h 满足 (4.5.2).

由算子 S_f 的定义, 在内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$,

$$S_f(\{u_b, \mathbf{u}_g\}) = \langle\langle \lambda_h \rangle\rangle.$$

由 $\lambda_h \in \Xi_h$ 知, $\langle\langle \lambda_h \rangle\rangle = \{0, \mathbf{0}\}$. 因此, $S_f(\{u_b, \mathbf{u}_g\}) = \{0, \mathbf{0}\}$. 引理得证. \square

引理4.5.3. 假设 $\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\} \in \mathcal{B}_h$, 在 $\partial\Omega$ 上, $\bar{u}_b = Q_b g$, $\bar{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} = Q_b g_n$, $\bar{\mathbf{u}}_g \cdot \boldsymbol{\tau} = Q_b(\nabla g \cdot \boldsymbol{\tau})$, 且满足算子方程

$$S_f(\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\}) = \{0, \mathbf{0}\}. \quad (4.5.4)$$

那么, $\bar{u}_h = \{\bar{u}_0, \bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\} \in \mathcal{V}_h$ 是 WG 算法 (2.4.2) 的解. 这里, 在每条单元 $T \in \mathcal{T}_h$, \bar{u}_0 是以下局部问题的解,

$$a_{s,T}(\bar{u}_h, v) = (f, v_0)_T, \quad \forall v = \{v_0, 0, \mathbf{0}\} \in \mathcal{W}_k(T). \quad (4.5.5)$$

证明 假设 $\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\} \in \mathcal{B}_h$ 满足算子方程 (4.5.4) 和相应的边界条件; 在每条单元 $T \in \mathcal{T}_h$, \bar{u}_0 为局部问题 (4.5.5) 的解. 求解局部问题

$$b_T(v, \bar{\lambda}_{h,T}) = a_{s,T}(\bar{u}_h, v), \quad \forall v = \{0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_k(T), \quad (4.5.6)$$

得到 $\bar{\lambda}_{h,T} \in \Lambda_k(\partial T)$. 从而, $\bar{\lambda}_h \in \Lambda_h$, 其中, $\bar{\lambda}|_{\partial T} = \bar{\lambda}_{h,T}$, $\bar{\lambda}|_{\partial\Omega} = 0$. 由算子 S_f 的定义, 在所有的内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$,

$$S_f(\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\}) = \langle\langle \bar{\lambda}_h \rangle\rangle,$$

再由 (4.5.4), 在所有的内部边或平面 $e \in \mathcal{E}_h^0$,

$$\langle\langle \bar{\lambda}_h \rangle\rangle = \{0, \mathbf{0}\}. \quad (4.5.7)$$

因此, $\bar{\lambda}_h \in \Xi_h$.

(4.5.5) 减去 (4.5.6),

$$a_{s,T}(\bar{u}_h, v) - b_T(v, \bar{\lambda}_{h,T}) = (f, v_0)_T, \quad \forall v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_k(T).$$

将上述方程对所有单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和,

$$a_s(\bar{u}_h, v) - b(v, \bar{\lambda}_h) = (f, v_0), \quad \forall v = \{v_0, v_b, \mathbf{v}_g\} \in \mathcal{W}_h^0. \quad (4.5.8)$$

注意到修正 $\lambda_{h,T}$ 在区域边界的值得到 λ_h , 因此上述方程仅对零边界值的检验函数 v 成立.

对任意的 $\sigma \in \Xi_h$, 由 (4.1.6),

$$b(\bar{u}_h, \sigma) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \langle \llbracket \bar{u}_h \rrbracket_e, \sigma_L \rangle_e = 0. \quad (4.5.9)$$

(4.5.8) 和 (4.5.9) 表明了 $(\bar{u}_h; \bar{\lambda}_h)$ 是杂交 WG 算法 (4.1.7)-(4.1.8) 的解. 注意到在边界 $\partial\Omega$ 上, $\bar{u}_b = Q_b g$, $\bar{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} = Q_b g_n$, $\bar{\mathbf{u}}_g \cdot \boldsymbol{\tau} = Q_b(\nabla g \cdot \boldsymbol{\tau})$. 因此, 由定理 4.1.1, \bar{u}_h 是 WG 算法 (2.4.2) 的解. 引理得证. \square

由引理 4.5.2 -4.5.3,

定理4.5.2. 假设 $\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\} \in \mathcal{B}_h$, 使得在 $\partial\Omega$ 上, $\bar{u}_b = Q_b g$, $\bar{\mathbf{u}}_g \cdot \mathbf{n} = Q_b g_n$, $\bar{\mathbf{u}}_g \cdot \boldsymbol{\tau} = Q_b(\nabla g \cdot \boldsymbol{\tau})$; \bar{u}_0 是局部问题 (4.5.5) 的解. 那么, $\bar{u}_h = \{\bar{u}_0, \bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\}$ 是 WG 算法 (2.4.2) 的解当且仅当 $\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\}$ 满足算子方程

$$S_f(\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\}) = \{0, \mathbf{0}\}. \quad (4.5.10)$$

4.5.2 变量消去法的计算格式

由 (4.5.3), 算子方程 (4.5.10) 化简为

$$S_0(\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\}) = -S_f(\{0, \mathbf{0}\}). \quad (4.5.11)$$

假设 $\{G_b, \mathbf{G}_g\} \in \mathcal{B}_h$, 使得在 $\partial\Omega$ 上, $G_b = Q_b g$, $\mathbf{G}_g \cdot \mathbf{n} = Q_b g_n$, $\mathbf{G}_g \cdot \boldsymbol{\tau} = Q_b(\nabla g \cdot \boldsymbol{\tau})$, 否则取 $\mathbf{0}$. 由 S_0 的线性性,

$$S_0(\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\}) = S_0(\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\} - \{G_b, \mathbf{G}_g\}) + S_0(\{G_b, \mathbf{G}_g\}).$$

将上式代入 (4.5.11),

$$S_0(\{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\} - \{G_b, \mathbf{G}_g\}) = -S_f(\{0, \mathbf{0}\}) - S_0(\{G_b, \mathbf{G}_g\}).$$

注意到 $\{p_b, \mathbf{p}_g\} = \{\bar{u}_b, \bar{\mathbf{u}}_g\} - \{G_b, \mathbf{G}_g\}$ 在边界取 $\mathbf{0}$. 取 $\{r_b, \mathbf{r}_g\} = -S_f(\{0, \mathbf{0}\}) - S_0(\{G_b, \mathbf{G}_g\})$,

$$S_0(\{p_b, \mathbf{p}_g\}) = \{r_b, \mathbf{r}_g\}. \quad (4.5.12)$$

线性方程组 (4.5.12) 即为 WG 算法 (2.4.2) 的 Schur 补形式. 注意到 (4.5.12) 仅涉及在内部边或面 \mathcal{E}_h^0 的自由度, 这使得在 WG 方法中实际求解的线性方程组的规模明显缩小.

下面我们给出变量消去算法: 计算 WG 算法 (2.4.2) 的解 $u_h = \{u_0, u_b, \mathbf{u}_g\}$ 的具体步骤如下:

(1) 在每个单元 T , 计算

$$r_h = -S_f(\{0, \mathbf{0}\}) - S_0(\{G_b, \mathbf{G}_g\}).$$

此步需并行计算局部刚度矩阵. 计算复杂度与未知量的个数成线性关系.

(2) 求解线性方程组 (4.5.12), 得到 $\{p_b, \mathbf{p}_g\} \in \mathcal{B}_h^0$. 该步要求一个有效的线性求解子.

(3) 计算 $\{u_b, \mathbf{u}_g\} = \{p_b, \mathbf{p}_g\} + \{G_b, \mathbf{G}_g\}$. 在每个单元 T , 求解局部问题 (4.5.1), 得到 $u_0 = D_f(\{u_b, \mathbf{u}_g\})$. 此步需并行求解, 计算复杂度和未知量的个数成线性关系.

在变量消去算法的具体实施中, 计算代价比较大的部分是步 (2). 注意到, 由定理 4.5.1 知, 规模缩小的方程组 (4.5.12) 对称正定.

第 5 章 静态麦克斯韦方程组的弱有限元方法

本章对静态麦克斯韦方程组构造了一类高效 WG 有限元离散方法, 特别引入了离散弱旋度和离散弱散度, 并将其应用于相应的变分形式中. 该类新的 WG 有限元方法不依赖于任何参数的选取, 并适用于区域任意形状之多面体正则剖分. 在理论上, 我们建立了 WG 方法在某些离散范数下的最优阶误差估计. 通过变量消去法, 我们得到一个仅与单元边界自由度相关的线性方程组的 Schur 补形式, 保证了 WG 方法在科学计算中的有效实施.

5.1 麦克斯韦方程组简介

麦克斯韦方程组是支配宏观电磁现象的一组基本方程. 本节的主要内容可参考文献 [27, 31]. 麦克斯韦方程组可表述为微分形式或积分形式. 在此, 我们给出其微分形式.

对于一般的时变场, 微分形式的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (5.1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5.1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.1.4)$$

其中, 方程 (5.1.1) 是描述时变磁场如何产生电场的法拉第定律, 方程 (5.1.2) 是描述电流和时变电场怎样产生磁场的麦克斯韦-安培定律, 散度条件 (5.1.3) 是描述电荷如何产生电场的高斯定律, 方程 (5.1.4) 是论述磁单极子不存在的磁场高斯定律. \mathbf{E} 表示电场强度, \mathbf{D} 表示电通量密度, \mathbf{H} 表示磁场强度, \mathbf{B} 表示磁通量密度, \mathbf{J} 表示电流密度, ρ 表示电荷密度.

另一个基本方程是表示电荷守恒的连续性方程,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.1.5)$$

方程 (5.1.1)-(5.1.5) 中只有三个是独立的, 称为独立方程. (5.1.1)-(5.1.3), 或 (5.1.1)、(5.1.2) 以及 (5.1.5), 都可被选作独立方程. (5.1.4) 和 (5.1.5), 或 (5.1.3) 和 (5.1.4) 可由独立方程导出, 称为辅助方程或相关方程.

当场量不随时间变化时, 称为静态场. 此时, (5.1.1)、(5.1.2) 和 (5.1.5) 可写成

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (5.1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (5.1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5.1.8)$$

而 (5.1.3) 和 (5.1.4) 保持不变. 此时, 电场和磁场之间没有相互作用. 因此, 我们单独考虑静电和静磁情形. (5.1.3) 和 (5.1.6) 描述静电情形, (5.1.4) 和 (5.1.7) 描述静磁情形, (5.1.8) 是 (5.1.7) 的必然结果.

当麦克斯韦方程组中的场量是单频的谐振函数时, 称为时谐场. 用复相位因子表示法 [23], (5.1.1)、(5.1.2) 和 (5.1.5) 可写成

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega \mathbf{B} = 0, \quad (5.1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - j\omega \mathbf{D} = \mathbf{J}, \quad (5.1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho. \quad (5.1.11)$$

其中, ω 表示角频率. 此时, 电场和磁场必须同时存在, 且发生相互作用. 静态场是时谐场在角频率 ω 趋于零时的极限情况.

前面描述的麦克斯韦方程组的五个方程中只有三个是独立的. 因为方程个数少于未知量的个数, 所以, 三个独立方程是非定解的形式. 当场量间的本

构关系确定后, 麦克斯韦方程组就变成定解形式. 本构关系描述了被考虑媒质的宏观性质. 对于简单媒质, 它们是

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (5.1.12)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5.1.13)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (5.1.14)$$

其中, 本构参数 ϵ , μ , σ 分别表示媒质的介电常数, 磁导率和电导率. 对于各向异性媒质, 本构参数是张量; 对于各向同性媒质, 本构参数是标量. 对于非均匀媒质, 本构参数是位置的函数; 对于均匀媒质, 本构参数不随位置变化.

为求解麦克斯韦方程组, 首先将包含两个场量的一阶微分方程化成只包含一个场量的二阶微分方程. 我们以静电和静磁情形来说明这种转换过程.

静电场由 (5.1.3) 和 (5.1.6) 支配. 电场 \mathbf{E} 表示为

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi, \quad (5.1.15)$$

则 (5.1.6) 成立. 其中, Φ 称为标量势. 将 (5.1.15) 代入 (5.1.3), 由 (5.1.2),

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = \rho, \quad (5.1.16)$$

此为著名的 Poisson 方程.

静磁场由 (5.1.4) 和 (5.1.7) 描述, 由

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (5.1.17)$$

则 (5.1.4) 成立. 其中, \mathbf{A} 称为向量势. 将 (5.1.17) 代入 (5.1.7), 由 (5.1.3),

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}. \quad (5.1.18)$$

然而, (5.1.18) 不能唯一确定 \mathbf{A} , 因为如果 \mathbf{A} 是 (5.1.18) 的一个解, 那么, 不管 f

的形式如何, $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ 也是 (5.1.18) 的解. 因此, 为了唯一确定 \mathbf{A} , 必须对 \mathbf{A} 的散度强加一个条件, 称为规范条件. 一个自然选择为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.1.19)$$

上面的讨论仅适用于静态场. 在时谐场情形下, 也可用类似于上面的方式引进标量势和向量势来表示电场和磁场 [46]. 我们将从包含电场和磁场的麦克斯韦方程组出发, 推导出只包含任意一个场量的控制微分方程.

由本构关系 (5.1.12)-(5.1.14), 从 (5.1.9) 和 (5.1.10) 中消去 \mathbf{H} , 得到关于 \mathbf{E} 的方程

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) - \omega^2 \epsilon_c \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{J}_i, \quad (5.1.20)$$

消去 \mathbf{E} , 得到关于 \mathbf{H} 的方程

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_c} \nabla \times \mathbf{H} \right) - \omega^2 \mu \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_c} \mathbf{J}_i \right). \quad (5.1.21)$$

其中, \mathbf{J}_i 是外加电流或源电流, $\epsilon_c = (\epsilon - j\sigma/\omega)$ 是感应电流 ($\sigma \mathbf{E}$) 和位移电流 ($j\omega \mathbf{D}$) 的共同作用; 为简单起见, 用 ϵ 表示 ϵ_c . (5.1.20) 和 (5.1.21) 称为非齐次向量波动方程.

求解上述微分方程, 可以得到许多解. 但是, 问题的真实解只有一个. 为求真实解, 需知相应区域的边界条件. 也即一个电磁问题的完整描述应包含微分方程和相关的边界条件. 在此, 我们给出实际问题的一些边界条件.

在两媒质的边界面上(例如媒质 1 和媒质 2), 边界条件为:

对于电场,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad (5.1.22)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0. \quad (5.1.23)$$

对于磁场,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0, \quad (5.1.24)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (5.1.25)$$

其中, \mathbf{n} 是界面的单位法向, 由媒质 2 指向媒质 1. (5.1.22)-(5.1.25) 称为场的连续性条件. 在这四个边界条件中, 只有两个是独立的, 一个是 (5.1.22) 或 (5.1.25), 另一个是 (5.1.23) 或 (5.1.24).

我们特别指出, (5.1.23) 和 (5.1.24) 基于在界面上既没有面电流又没有面电荷存在的假设. 如果在界面上确实存在面电流密度 \mathbf{J}_s 和面电荷密度 ρ_s , 这两个方程修正为

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s, \quad (5.1.26)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s. \quad (5.1.27)$$

若两媒质之一是理想导体, 例如媒质 2, 边界条件可化为一特殊情形. 由于理想导体内部不存在场, (5.1.22) 为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0. \quad (5.1.28)$$

(5.1.25) 退化为

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.1.29)$$

其中, \mathbf{E} 和 \mathbf{B} 是导体外部的场, \mathbf{n} 是导体的单位外法向. 此时, 边界始终存在面电流 $\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ 和面电荷 $\rho_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$.

若媒质 2 是非理想导体, 可以证明 [44]: 导体边界面上的电场和磁场关系为

$$\mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} = \eta \mathbf{Z}_0 \mathbf{n} \times \mathbf{H}, \quad (5.1.30)$$

或者

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \eta \mathbf{Z}_0 [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\mathbf{n} - \mathbf{H}]. \quad (5.1.31)$$

其中, $\eta = \sqrt{\mu_{r2}/\epsilon_{r2}}$ 为媒质 2 的归一化特征阻抗. (5.1.30) 或 (5.1.31) 称为阻抗边界条件. 在二维情况, 当 $\mathbf{E} = \hat{z}\mathbf{E}_z$ 时,

$$\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial \mathbf{n}} = jk_0 \frac{\mu_{r1}}{\eta} \mathbf{E}_z. \quad (5.1.32)$$

当 $\mathbf{H} = \hat{z}\mathbf{H}_z$ 时,

$$\frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial \mathbf{n}} = jk_0 \epsilon_{r1} \eta \mathbf{H}_z. \quad (5.1.33)$$

第一种情形称为 \mathbf{E}_z 极化, 第二种情形称为 \mathbf{H}_z 极化.

当区域的外边界延伸至无穷远时, 称为无约束的或开放的区域. 为得到问题的唯一解, 在外边界处也需确定一个条件, 称为辐射条件.

假设所有源和物体均在自由空间中, 并位于距坐标系原点有限的距离内, 电场和磁场满足

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} + jk_0 \hat{\mathbf{r}} \times \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \right] = 0, \quad (5.1.34)$$

其中, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 通常称 (5.1.34) 为一般三维场的索末菲辐射条件. 对于二维场, 索末菲辐射条件为

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} + jk_0 \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} \right] = 0, \quad (5.1.35)$$

其中, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

通常希望外边界尽可能靠近目标, 从而减小计算区域的大小. 对于二维场, 可以证明 [4]: 在包围辐射源的虚构圆柱面上, 场 E_z 和 H_z 满足高阶辐射条件

$$B_m \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix} = O(\rho^{-2m-1/2}), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.1.36)$$

其中, ρ 表示所选面的半径. 当 $m = 1$ 和 2 时, 算符 B_m 为

$$B_1 = \frac{\partial}{\partial \rho} + jk_0 + \frac{1}{2\rho}, \quad (5.1.37)$$

$$B_2 = \frac{\partial}{\partial \rho} + jk_0 + \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{8\rho(1 + jk_0\rho)} - \frac{1}{2\rho(1 + jk_0\rho)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (5.1.38)$$

其中, (ρ, φ, z) 是柱坐标. 注意, 索末菲辐射条件 (5.1.35) 是 (5.1.36) 在 $m = \frac{1}{2}$ 和 $B_{1/2} = \frac{\partial}{\partial \rho} + jk_0$ 条件下的特例. (5.1.36) 称为吸收边界条件, 其物理意义为在此边界处应用 (5.1.36), 只有少部分入射功率从边界处被反射回来.

对于三维情形, 可以证明 [56]: 在包围辐射源的球面上, 场 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 满足高阶辐射条件:

$$B_m \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = O(r^{-2m-1}), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1.39)$$

当 $m = 1$ 和 2 时, 算符 B_m 为

$$B_1(\mathbf{E}) = \mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{E} - jk_0 \mathbf{E}_t + (s-1) \nabla_t \mathbf{E}_t, \quad (5.1.40)$$

$$B_2(\mathbf{E}) = \mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{E} - jk_0 \mathbf{E}_t - \frac{r}{2(1 + jk_0 r)} \times \{ \nabla \times [\mathbf{r}(\nabla \times \mathbf{E})_r] \\ + (s-1) \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{E}_t) + jk_0 (2-s) \nabla_t E_r \}. \quad (5.1.41)$$

其中, s 是任意数, 下标 r 表示有关量的径向分量, 下标 t 表示有关量的横向分量. 用 H 代替 \mathbf{E} , 得到 \mathbf{H} 的表达式. 令 $s = 1$, (5.1.40) 退化为 (5.1.34) 描述的索末菲辐射条件, (5.1.41) 退化为参考文献 [42] 中的形式. 在有限元分析中, 较好的选择是在 (5.1.41) 式中取 $s = 2$.

5.2 常用数值方法

目前, 求解麦克斯韦方程组的常用数值方法包括 Nédélec 旋度协调元, 间断 Galerkin 有限元方法, C^0 有限元方法等.

首先, 我们介绍离散麦克斯韦方程组的 Nédélec 旋度协调元, 详细内容可参考文献 [31, 38]. 许多学者独立发现了最低阶元 ($k = 1$) 空间. 特别地, Whitney [57] 最先提出对最低阶元使用多项式空间, 也称最低阶元为 Whitney 元. 由于最低阶元的自由度与网格边相关 (见图 5-1), 也称最低阶元为边元.

设多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)'$, 其中 α_i ($i = 1, 2, 3$) 为非负整数. 令 $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$, 且 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. 多项式 $p \in P_k$ 当且仅当

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha,$$

其中, 系数 $a_\alpha \in \mathbb{C}$. 多项式 $\tilde{p} \in \tilde{P}_k$ 当且仅当

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha,$$

其中, 系数 $a_\alpha \in \mathbb{C}$. 在向量空间 \mathbb{R}^d 中, 空间 P_k 的维数 $\dim(P_k) = C_{d+k}^k$. 在向量空间 \mathbb{R}^3 中, 空间 \tilde{P}_k 的维数 $\dim(\tilde{P}_k) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

定义一类特殊的多项式空间

$$S_k = \{\mathbf{p} \in (\tilde{P}_k)^3 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = 0\}.$$

如果 $\mathbf{p} \in (\tilde{P}_k)^3$, 那么 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \in \tilde{P}_{k+1}$; 反之, \tilde{P}_{k+1} 中任意多项式可以表示为上述形式. 因此,

$$\begin{aligned} \dim(S_k) &= 3\dim(\tilde{P}_k) - \dim(\tilde{P}_{k+1}) \\ &= \frac{3}{2}(k+2)(k+1) - \frac{1}{2}(k+3)(k+2) \\ &= k(k+2). \end{aligned}$$

定义空间

$$R_k = (P_{k-1})^3 \oplus S_k. \quad (5.2.1)$$

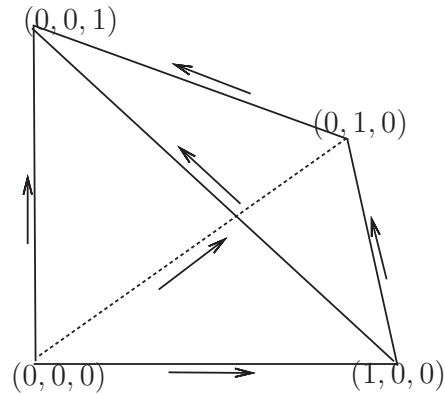


图 5-1 最低阶旋度协调元 $k = 1$.

R_k 的维数为

$$\dim R_k = 3\dim(P_{k-1}) + \dim(S_k) = \frac{1}{2}(k+3)(k+2)k.$$

引理5.2.1. 成立代数分解

$$(P_k)^3 = R_k \oplus \nabla \tilde{P}_{k+1}.$$

边有限元空间依赖于 (5.2.1) 定义的向量多项式空间 R_k . 在定义和分析元之前, 引入与 R_k 的离散 Helmholtz 分解有关的一个结论.

引理5.2.2. 假设 $\mathbf{u} \in R_k$ 满足 $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. 存在 $p \in P_k$, 使得 $\mathbf{u} = \nabla p$.

注5.2.1. 假设 f 是二维平面 (x_1, x_2) 中一个三角形, 定义

$$S_k(f) = \{\mathbf{p} \in (\tilde{P}_k)^2 : \mathbf{p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0\},$$

那么,

$$R_k(f) = (P_{k-1}(f))^2 \oplus S_k(f).$$

我们定义参考元上的旋度协调元.

定义 5.2.1. (参考元上的旋度协调元) 参考元上的旋度协调元定义为

- \hat{T} 为参考四面体,
- $\mathcal{P}_{\hat{T}} = R_k$,
- 自由度分为 3 类: \hat{T} 的边 \hat{e} , \hat{T} 的面 \hat{f} , 以及 \hat{T} 本身.

记 $\hat{\tau}$ 为 \hat{e} 方向的单位向量. 定义三类不同的自由度如下 (见图 5-1):

(1) 与元边相关的集合

$$M_{\hat{e}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{e}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\tau} \hat{q} d\hat{s}, \quad \forall \hat{q} \in P_{k-1}(\hat{e}), \quad \forall \hat{e} \subset \hat{T} \right\}.$$

(2) 与元面相关的集合

$$M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \frac{1}{A_{\hat{f}}} \int_{\hat{f}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{q}} d\hat{A}, \quad \forall \hat{f} \subset \hat{T}, \quad \hat{\mathbf{q}} \in (P_{k-2}(\hat{f}))^3, \quad \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \right\},$$

其中 $A_{\hat{f}}$ 表示 \hat{f} 的面积.

(3) 与元体积相关的集合

$$M_{\hat{T}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{q}} d\hat{V}, \quad \forall \hat{\mathbf{q}} \in (P_{k-3}(\hat{T}))^3 \right\}.$$

那么, $\mathcal{N}_{\hat{T}} = M_{\hat{e}}(\hat{\mathbf{u}}) \cup M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}}) \cup M_{\hat{T}}(\hat{\mathbf{u}})$.

注 5.2.2. 如果 $\hat{\mathbf{q}} \in (P_{k-2}(\hat{f}))^3$, $\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, 那么, $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{q}}) \times \hat{\mathbf{n}}$. 因此

$$\int_{\hat{f}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{q}} d\hat{A} = \int_{\hat{f}} \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}} d\hat{A}.$$

但是, $\hat{\mathbf{q}} \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}} \in (P_{k-2}(\hat{f}))^2$, 其中 $(P_{k-2}(\hat{f}))^2$ 表示分量属于空间 $P_{k-2}(\hat{f})$ 的正切于 \hat{f} 的向量集合.

在 \hat{T} 上, $\hat{\mathbf{u}} \in R_k$, 由仿射变换 F_T , 存在某个 $u \in T$, 使得

$$\mathbf{u} \circ F_T = (B'_T)^{-1} \hat{\mathbf{u}}. \quad (5.2.2)$$

\mathbf{u} 的旋度和 $\hat{\mathbf{u}}$ 的旋度关系为

$$\nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{\det(B_T)} B_T \hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{u}}.$$

令 $\hat{\tau}$ 是四面体 \hat{T} 的边 \hat{e} 方向的单位向量. 那么,

$$\tau = \frac{B_T \hat{\tau}}{|B_T \hat{\tau}|}, \quad (5.2.3)$$

这里, \hat{T} 的边 \hat{e} 的单位切向 $\hat{\tau}$ 在仿射变换 F_T 下的象是 T 的边 e 的单位切向 τ .

引理 5.2.3. R_k 在仿射变换 (5.2.2) 下不变.

由此, 我们可以定义在一般的四面体 T 上的旋度协调元.

定义 5.2.2. (旋度协调元) 在一般的四面体 T 上的旋度协调元定义为

- T 是四面体,
- $\mathcal{P}_T = R_k$,
- 自由度分为 3 类: T 的边 e , T 的面 f , 以及 T 本身.

记 τ 为 e 方向的单位向量. 定义三类自由度 (见图 5-1):

(1) 与元边相关的集合

$$M_e(\mathbf{u}) = \left\{ \int_e \mathbf{u} \cdot \tau q ds, \quad \forall q \in P_{k-1}(e), \quad \forall e \subset T \right\}. \quad (5.2.4)$$

(2) 与元面相关的集合

$$M_f(\mathbf{u}) = \left\{ \frac{1}{A_f} \int_f \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} dA, \quad \forall f \subset T, \right. \\ \left. \forall \mathbf{q} = B_T \hat{\mathbf{q}}, \quad \hat{\mathbf{q}} \in (P_{k-2}(\hat{f}))^3, \quad \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \right\}, \quad (5.2.5)$$

其中, A_f 表示 f 的面积.

(3) 与元体积相关的集合

$$M_T(\mathbf{u}) = \left\{ \int_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} dV, \text{ 任意的 } \mathbf{q} \text{ 通过映射 } \mathbf{q} \circ F_T = (1/\det(B_T))B_T\hat{\mathbf{q}} \right. \\ \left. \text{得到, } \hat{\mathbf{q}} \in (P_{k-3})^3 \right\}. \quad (5.2.6)$$

那么, $\mathcal{N}_T = M_e(\mathbf{u}) \cup M_f(\mathbf{u}) \cup M_T(\mathbf{u})$.

这些自由度在从 \hat{T} 到 T 的仿射变换下是不变的.

由于在实际中的重要性, 特别讨论最低阶元 ($k = 1$), 也称线性边元. 当 $k = 1$ 时, Nédélec 证明了

$$R_1 = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3\}.$$

这里, \mathbf{a}, \mathbf{b} 分量中的 6 个常数由单元 T 的 6 条边 e 上的矩 $\int_e \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ 确定 (见图 5-1).

以 i 和 j 为顶点的边上的单位积分的基函数为

$$\psi_{i,j} = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i,$$

其中 λ_i 是相应于节点 \mathbf{a}_i 的重心坐标函数. 由于中点求积公式对于二次多项式精确成立, 故 $\int_e \psi_{i,j} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = 1$, 且

$$\nabla \times \psi_{i,j} = 2\nabla \lambda_i \times \nabla \lambda_j.$$

引理 5.2.4. 假设 $\det(B_T) > 0$, T 的边的切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 与 \hat{T} 的边的切向量 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 的关系为 (5.2.3). 那么, 在仿射变换 (5.2.2) 下, \mathbf{u} 在 T 上的自由度与 $\hat{\mathbf{u}}$ 在 \hat{T} 上的自由度相等.

引理 5.2.5. 假设 $\mathbf{u} \in R_k$, 使得 (5.2.5) 的自由度在给定面 f 为 0, 且 (5.2.4) 的自由度在 f 的每条边为 0. 那么, 在给定面 f , $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$.

引理 5.2.6. 假设 $\mathbf{u} \in R_k$, 使得 (5.2.4)-(5.2.6) 所定义的自由度为 0. 那么, $\mathbf{u} = 0$.

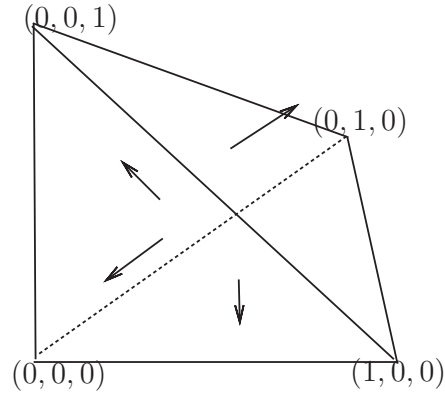


图 5-2 最低阶散度协调元 $k = 1$.

定理5.2.1. 定义 5.2.2 所定义的有限元 $H(\text{curl}; \Omega)$ 是协调元且唯一可解.

定义网格剖分 \mathcal{T}_h 上的全局有限元空间

$$V_h = \{\mathbf{u} \in H(\text{curl}; \Omega) : \mathbf{u}|_T \in R_k, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

定义一特殊的向量多项式空间. 对 $k > 0$, 定义

$$D_k = (P_{k-1})^3 \oplus \tilde{P}_{k-1}\mathbf{x}.$$

易知 D_k 的维数为 $\frac{1}{2}(k+3)(k+1)k$.

定义5.2.3. (散度协调元) 散度协调元定义为 (见图 5-2)

- \hat{T} 是参考四面体元;
- $\mathcal{P}_{\hat{T}} = D_k$;
- 自由度 $\mathcal{N}_{\hat{T}} = M_{\hat{T}}(\hat{\mathbf{u}}) \cup M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}})$. 其中, 对充分光滑的 $\hat{\mathbf{u}}$, 定义

$$M_{\hat{T}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{q}} d\hat{V}, \quad \forall \hat{\mathbf{q}} \in (P_{k-2})^3 \right\}.$$

$$M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{f}} \hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{n}} \hat{q} d\hat{A}, \quad \forall \hat{q} \in P_{k-1}(\hat{f}), \quad \forall \hat{f} \right\}.$$

定义空间

$$W_h = \{ \mathbf{u}_h \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \mathbf{u}_h|_T \in D_k, \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

接下来, 我们简要介绍求解麦克斯韦方程组的其他数值方法. Houston, Perugia 和 Schotzau 深入研究了求解麦克斯韦方程组的间断 Galerkin 有限元方法 [24–26, 40, 41]. 发展了散度为 0 约束下离散 curl-curl 算子的数值方法, 这些方法包括 $H(\operatorname{curl})$ 协调元方法 [31, 38], 以及弱过度惩罚对称内罚方法 [7]. 段火元等提出了求解麦克斯韦方程组的 C^0 元方法 [16, 17]. 王军平等提出了求解麦克斯韦方程组的 WG 有限元方法 [36], 引入了两类弱函数 $\mathbf{u}_h = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\} \in [P_k(T)]^3 \times [P_k(e)]^3$, $p_h = \{p_0, p_b\} \in P_{k-1}(T) \times P_k(e)$, 建立了 WG 方法在适当定义的离散范数下的最优阶误差估计.

5.3 弱散度和弱旋度

考虑齐次媒质 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中静态麦克斯韦方程组模型: 求 \mathbf{u} 和 p , 满足

$$\nabla \times (\mu \nabla \times \mathbf{u}) - \epsilon \nabla p = \mathbf{f}_1, \quad \text{在 } \Omega, \quad (5.3.1)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{u}) = g_1, \quad \text{在 } \Omega, \quad (5.3.2)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \phi, \quad \text{在 } \partial\Omega, \quad (5.3.3)$$

$$p = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega, \quad (5.3.4)$$

其中系数 $\mu > 0$, $\epsilon > 0$ 分别为媒质的导磁率和介电常数.

静态麦克斯韦方程组 (5.3.1)-(5.3.4) 的弱形式为: 求 $(\mathbf{u}, p) \in H(\operatorname{curl}; \Omega) \times L^2(\Omega)$, 使得在 $\partial\Omega$, $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \phi$, 满足

$$(\nu \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{curl}; \Omega), \quad (5.3.5)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = (g, q), \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (5.3.6)$$

其中 $\nu = \mu/\epsilon$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1/\epsilon$, $g = g_1/\epsilon$.

变分形式 (5.3.5)-(5.3.6) 中所涉及的两个微分算子为散度和旋度. 为 WG 方法求解, 需引入弱散度、弱旋度及其离散形式, 具体可参考文献 [36, 53].

令 K 为任意多面体区域, 其边界记作 ∂K . 为定义弱散度, 引入弱向量值函数 $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\}$, 其中 $\mathbf{v}_0 \in [L^2(K)]^3$, $\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} \in L^2(\partial K)$. 这里, \mathbf{v}_0 表示 \mathbf{v} 在 K 的内部的值, \mathbf{v}_b 表示 \mathbf{v} 在 K 的边界 ∂K 的值. 记 $V(K)$ 为 K 上所有弱向量值函数构成的空间, 即

$$V(K) = \{\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} : \mathbf{v}_0 \in [L^2(K)]^3, \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} \in L^2(\partial K)\}.$$

定义5.3.1. (弱散度) 在标准的 L^2 内积下, $L^2(K)$ 的对偶空间仍为 $L^2(K)$. 同理, 对任意的 $\mathbf{v} \in V(K)$, \mathbf{v} 的弱散度, 记作 $\nabla_w \cdot \mathbf{v}$, 定义为 $H^1(K)$ 的对偶空间中的线性函数, 使得对任意的 $\varphi \in H^1(K)$, 满足

$$(\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \varphi)_K = -(\mathbf{v}_0, \nabla \varphi)_K + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K},$$

其中 \mathbf{n} 为 ∂K 的单位外法向.

定义包含映射 $i_V : [H^1(K)]^3 \rightarrow V(K)$, 使得对任意的 $\phi \in [H^1(K)]^3$,

$$i_V(\phi) = \{\phi|_K, \phi|_{\partial K}\}.$$

Sobolev 空间 $[H^1(K)]^3$ 在包含映射 i_V 下嵌入到空间 $V(K)$.

记 $P_r(K)$ 为 K 上次数不超过 r 的多项式集合.

定义5.3.2. (离散弱散度) 对任意的 $\mathbf{v} \in V(K)$, \mathbf{v} 的离散弱散度算子, 记作 $\nabla_{w,r,K} \cdot \mathbf{v}$, 定义为 $P_r(K)$ 中唯一的项式, 使得对任意的 $\varphi \in P_r(K)$, 满足

$$(\nabla_{w,r,K} \cdot \mathbf{v}, \varphi)_K = -(\mathbf{v}_0, \nabla \varphi)_K + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K}, \quad (5.3.7)$$

其中 \mathbf{n} 为 ∂K 的单位外法向.

为定义弱旋度, 引入弱函数 $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\}$, 其中 $\mathbf{v}_0 \in [L^2(K)]^3$, $\mathbf{v}_b \times \mathbf{n} \in [L^2(\partial K)]^3$. 记 $\mathcal{V}(K)$ 为 K 上所有弱向量值函数构成的空间, 即

$$\mathcal{V}(K) = \{\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} : \mathbf{v}_0 \in [L^2(K)]^3, \mathbf{v}_b \times \mathbf{n} \in [L^2(\partial K)]^3\}.$$

定义5.3.3. (弱旋度) 在标准 L^2 内积下, $[L^2(K)]^3$ 的对偶空间仍为 $[L^2(K)]^3$. 同理, 对任意的 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(K)$, \mathbf{v} 的弱旋度, 记作 $\nabla_w \times \mathbf{v}$, 定义为 $[H^1(K)]^3$ 的对偶空间中的线性函数, 使得对任意的 $\varphi \in [H^1(K)]^3$, 满足

$$(\nabla_w \times \mathbf{v}, \varphi)_K = (\mathbf{v}_0, \nabla \times \varphi)_K - \langle \mathbf{v}_b \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K},$$

其中 \mathbf{n} 为 ∂K 的单位外法向.

定义包含映射 $i_{\mathcal{V}} : [H^1(K)]^3 \rightarrow \mathcal{V}(K)$, 使得对任意的 $\phi \in [H^1(K)]^3$,

$$i_{\mathcal{V}}(\phi) = \{\phi|_K, \phi|_{\partial K}\}.$$

Sobolev 空间 $[H^1(K)]^3$ 在包含映射 $i_{\mathcal{V}}$ 下嵌入到空间 $\mathcal{V}(K)$.

定义5.3.4. (离散弱旋度) 对任意的 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(K)$, \mathbf{v} 的离散弱旋度算子, 记作 $\nabla_{w,r,K} \times \mathbf{v}$, 定义为 $[P_r(K)]^3$ 中唯一的多项式, 使得对任意的 $\varphi \in [P_r(K)]^3$, 满足

$$(\nabla_{w,r,K} \times \mathbf{v}, \varphi)_K = (\mathbf{v}_0, \nabla \times \varphi)_K - \langle \mathbf{v}_b \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K}, \quad (5.3.8)$$

其中 \mathbf{n} 为 ∂K 的单位外法向.

5.4 弱有限元方法

令 \mathcal{T}_h 为区域 Ω 的一个任意形状的多面体剖分, 网格大小 h . 假设 \mathcal{T}_h 为正则剖分, 具体参考定义 1.4.1. 记 \mathcal{E}_h 为 \mathcal{T}_h 中所有面构成的集合, $\mathcal{E}_h^0 = \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega$ 为 \mathcal{T}_h 中所有内部面构成的集合. 定义 $[[\mathbf{v}]]_e = \mathbf{v}|_{T_1} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}|_{T_2} \cdot \mathbf{n}_2$ 为 \mathbf{v} 在 e 上的跳度, 其中 $e \in \mathcal{E}_h^0$ 为两个单元 T_1, T_2 的公共边, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 分别为 $\partial T_1, \partial T_2$ 的单位外法向.

给定整数 $k \geq 1$, 定义弱有限元空间

$$W_h = \{q : q \in L^2(\Omega), q|_T \in P_{k-1}(T)\},$$

$$V_h = \{\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} : \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\}|_T \in [P_k(T)]^3 \times [P_k(e)]^3, e \subset \partial T\}.$$

定义 V_h 的子空间

$$V_h^0 = \{\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} \in V_h, \mathbf{v}_b \times \mathbf{n}|_e = 0, e \subset \partial\Omega\}.$$

在弱有限元空间 V_h 中, 离散弱散度 $(\nabla_{w,k-1} \cdot)$ 和离散弱旋度 $(\nabla_{w,k-1} \times)$ 可在每个单元 T 上分别由 (5.3.7), (5.3.8) 计算得到. 也即,

$$(\nabla_{w,k-1} \cdot \mathbf{v})|_T = \nabla_{w,k-1,T} \cdot (\mathbf{v}|_T), \quad \forall \mathbf{v} \in V_h,$$

$$(\nabla_{w,k-1} \times \mathbf{v})|_T = \nabla_{w,k-1,T} \times (\mathbf{v}|_T), \quad \forall \mathbf{v} \in V_h.$$

为记号的简便, 以下在记号 $(\nabla_{w,k-1} \cdot)$, $(\nabla_{w,k-1} \times)$ 中略去下标 $k-1$. 相应于 (5.3.5)-(5.3.6) 中的双线性型, 引入记号

$$(\nu \nabla_w \times \mathbf{v}, \nabla_w \times \mathbf{w})_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nu \nabla_w \times \mathbf{v}, \nabla_w \times \mathbf{w})_T,$$

$$(\nabla_w \cdot \mathbf{v}, q)_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, q)_T.$$

引入双线性型

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nu \nabla_w \times \mathbf{v}, \nabla_w \times \mathbf{w})_h + s(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$b(\mathbf{v}, q) = (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, q)_h,$$

其中

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_b \rangle_{\partial T}.$$

弱 Galerkin 算法3. 求解 (5.3.1)-(5.3.4) 的数值算法为: 求 $\mathbf{u}_h = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\} \in V_h$, $p_h \in W_h$, 使得在 $\partial\Omega$ 上, $\mathbf{u}_b \times \mathbf{n} = Q_b\phi$, 满足

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = (f, \mathbf{v}_0), \quad (5.4.1)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q) = (g, q), \quad (5.4.2)$$

对任意的 $\mathbf{v} \in V_h^0$, $q \in W_h$.

引理5.4.1. 弱 Galerkin 算法 3 存在唯一解.

证明 只需证明当 $\mathbf{f} = 0$, $\phi = 0$, $g = 0$ 时, (5.4.1)-(5.4.2) 只有零解. 在上述齐次条件下, 在 (5.4.1)-(5.4.2) 中取 $\mathbf{v} = \mathbf{u}_h$, $q = p_h$, 将所得的两个方程相减,

$$(\nu \nabla_w \times \mathbf{u}_h, \nabla_w \times \mathbf{u}_h)_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_b, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_b \rangle_{\partial T} = 0,$$

从而, 在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上 $\nabla_w \times \mathbf{u}_h = 0$; 在 ∂T 上 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_b$. 因此, 由 (5.3.8) 以及分部积分, 对任意的 $\varphi \in [P_{k-1}(T)]^3$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_w \times \mathbf{u}_h, \varphi)_T \\ &= (\mathbf{u}_0, \nabla \times \varphi)_T - \langle \mathbf{u}_b \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla \times \mathbf{u}_0, \varphi)_T + \langle (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_b) \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla \times \mathbf{u}_0, \varphi)_T, \end{aligned}$$

从而在 $T \in \mathcal{T}_h$ 上 $\nabla \times \mathbf{u}_0 = 0$. 由 (5.4.2), (5.3.7) 以及分部积分, 对任意的

$q \in W_h$,

$$\begin{aligned}
 0 &= b(\mathbf{u}_h, q) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \cdot \mathbf{u}_h, q)_T \\
 &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{u}_0, \nabla q)_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{u}_0, q)_T - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_b) \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{u}_0, q)_T.
 \end{aligned}$$

在上式中取 $q = \nabla \cdot \mathbf{u}_0$, 则在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上 $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$.

注意到 $\nabla \times \mathbf{u}_0 = 0$ 以及 $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{n}$ 连续. 因此, 存在一个位势函数 φ , 使得在 Ω 上 $\mathbf{u}_0 = \nabla \varphi$. 由 $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$ 以及 $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}$ 连续知, 在 Ω 上满足 $\Delta \varphi = 0$. 由边界条件知在 $e \subset \partial\Omega$ 上 $\mathbf{u}_b \times \mathbf{n} = 0$, 故在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{u}_0 \times \mathbf{n} = \nabla \varphi \times \mathbf{n} = 0$. 因此, φ 在 $\partial\Omega$ 必为一个常数. 由 Laplace 方程解的唯一性知, 若 Ω 是单连通区域, 则 $\varphi = C$ 是 $\Delta \varphi = 0$ 的唯一解. 从而, $\mathbf{u}_0 = \nabla \varphi = 0$. 由在 ∂T 上 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_b$, 知 $\mathbf{u}_b = 0$.

由于 $\mathbf{u}_h = 0$, 由 (5.4.1) 知, 对任意的 $\mathbf{v} \in V_h^0$, $b(\mathbf{v}, p_h) = 0$. 由 (5.3.7),

$$\begin{aligned}
 0 &= b(\mathbf{v}, p_h) \\
 &= (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, p_h)_h \\
 &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}_0, \nabla p_h)_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, p_h \rangle_{\partial T}.
 \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

在 (5.4.3) 中取 $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} = \{\nabla p_h, 0\}$ 知, 在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$, $\nabla p_h = 0$, 也即 p_h 在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 是一个常数. 在 (5.4.3) 中取 $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} = \{0, \llbracket p_h \rrbracket_e \mathbf{n}\}$, 其中 $e \in \mathcal{E}_h$, \mathbf{n} 是 ∂e 的单位外法向, 知 p_h 沿所有面 $e \in \mathcal{E}_h^0$ 连续. 因此, 在 Ω 上 $p_h = C$. 在 $e \subset \partial\Omega$ 上 $\llbracket p_h \rrbracket_e = 0$ 知, 在 $\partial\Omega$ 上 $p_h = 0$. 因此, 在 Ω 上 $p_h = 0$. 引理

得证. \square

5.5 误差方程

本节旨在推导 WG 有限元方法的误差方程, 误差方程在 WG 有限元方法的收敛性分析中极为重要.

对任意的 $T \in \mathcal{T}_h$, 记 Q_0 为到 $[P_k(T)]^3$ 的 L^2 投影. 对任意的面 $e \subset \partial T$, 记 Q_b 为到 $[P_k(e)]^3$ 的 L^2 投影. 记 $Q_h \mathbf{u}$ 为到弱有限元空间 V_h 的 L^2 投影, 使得在每个单元 T 上,

$$Q_h \mathbf{u} = \{Q_0 \mathbf{u}, Q_b \mathbf{u}\}.$$

记 $\mathcal{Q}_h, \mathbf{Q}_h$ 分别为到 $P_{k-1}(T)$ 和 $[P_{k-1}(T)]^3$ 的 L^2 投影.

引理5.5.1. 投影算子 $Q_h, \mathbf{Q}_h, \mathcal{Q}_h$ 满足交换性

$$\nabla_w \cdot (Q_h \mathbf{v}) = \mathcal{Q}_h(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega), \quad (5.5.1)$$

$$\nabla_w \times (Q_h \mathbf{v}) = \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega). \quad (5.5.2)$$

证明 由 (5.3.7), 以及分部积分, 对任意的 $\varphi \in P_{k-1}(T)$,

$$\begin{aligned} (\nabla_w \cdot (Q_h \mathbf{v}), \varphi)_T &= -(Q_0 \mathbf{v}, \nabla \varphi)_T + \langle Q_b \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T} \\ &= -(\mathbf{v}, \nabla \varphi)_T + \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}, \varphi)_T \\ &= (\mathcal{Q}_h(\nabla \cdot \mathbf{v}), \varphi)_T, \end{aligned}$$

(5.5.1) 得证.

由 (5.3.8), 以及分部积分, 对任意的 $\varphi \in [P_{k-1}(T)]^3$,

$$(\nabla_w \times (Q_h \mathbf{v}), \varphi)_T = (Q_0 \mathbf{v}, \nabla \times \varphi)_T - \langle (Q_b \mathbf{v}) \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathbf{v}, \nabla \times \varphi)_T - \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T} \\
 &= (\nabla \times \mathbf{v}, \varphi)_T \\
 &= (\mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{v}), \varphi)_T,
 \end{aligned}$$

(5.5.2) 得证. \square

假设 $\mathbf{u}_h = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\} \in V_h, p_h \in W_h$ 为 WG 算法 (5.4.1)-(5.4.2) 的解; \mathbf{u}, p 为静态麦克斯韦方程组 (5.3.1)-(5.3.4) 的准确解. \mathbf{u} 到弱有限元空间 V_h 的 L^2 投影记作 $Q_h \mathbf{u} = \{Q_0 \mathbf{u}, Q_b \mathbf{u}\}$, p 到弱有限元空间 W_h 的 L^2 投影记作 $Q_h p$. 定义误差函数

$$\mathbf{e}_h = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b\} = \{Q_0 \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, Q_b \mathbf{u} - \mathbf{u}_b\}, \quad (5.5.3)$$

$$\epsilon_h = Q_h p - p_h. \quad (5.5.4)$$

引理 5.5.2. 假设 $(\mathbf{w}; \rho) \in H(\text{curl}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ 充分正则, 满足

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{w}) - \nabla \rho = \eta, \quad \text{在 } \Omega. \quad (5.5.5)$$

记 $(Q_h \mathbf{w}; Q_h \rho)$ 为 $(\mathbf{w}; \rho)$ 到弱有限元空间 $V_h \times W_h$ 的 L^2 投影. 那么, 对任意的 $\mathbf{v} \in V_h^0$, 成立

$$(\nu \nabla_w \times (Q_h \mathbf{w}), \nabla_w \times \mathbf{v})_h + (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, Q_h \rho)_h = (\eta, \mathbf{v}_0) + l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) + \theta_{\rho}(\mathbf{v}),$$

其中 $l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$ 和 $\theta_{\rho}(\mathbf{v})$ 是弱有限元空间 V_h^0 中的线性函数, 定义为

$$l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}) \rangle_{\partial T}, \quad (5.5.6)$$

$$\theta_{\rho}(\mathbf{v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (\rho - Q_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T}. \quad (5.5.7)$$

证明 由 (5.5.2), (5.3.8), 以及分部积分,

$$\begin{aligned}
 & (\nu \nabla_w \times (\mathbf{Q}_h \mathbf{w}), \nabla_w \times \mathbf{v})_T \\
 &= (\nu \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}), \nabla_w \times \mathbf{v})_T \\
 &= (\nu \mathbf{v}_0, \nabla \times \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}))_T - \langle \nu \mathbf{v}_b \times \mathbf{n}, \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}) \rangle_{\partial T} \quad (5.5.8) \\
 &= (\nu \nabla \times \mathbf{v}_0, \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}))_T + \langle \nu(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n}, \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}) \rangle_{\partial T} \\
 &= (\nu \nabla \times \mathbf{v}_0, \nabla \times \mathbf{w})_T + \langle \nu(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n}, \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}) \rangle_{\partial T}.
 \end{aligned}$$

由 (5.5.1), (5.3.7), $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_b, \rho \mathbf{n} \rangle_{\partial T} = 0$ 以及分部积分,

$$\begin{aligned}
 & (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \mathcal{Q}_h \rho)_h \\
 &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}_0, \nabla(\mathcal{Q}_h \rho))_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_b, (\mathcal{Q}_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{v}_0, \mathcal{Q}_h \rho)_T - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (\mathcal{Q}_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot \mathbf{v}_0, \rho)_T - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (\mathcal{Q}_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\
 &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}_0, \nabla \rho)_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0, \rho \mathbf{n} \rangle_{\partial T} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (\mathcal{Q}_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\
 &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}_0, \nabla \rho)_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, \rho \mathbf{n} \rangle_{\partial T} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (\mathcal{Q}_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \\
 &= -(\mathbf{v}_0, \nabla \rho) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (\rho - \mathcal{Q}_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T},
 \end{aligned}$$

从而

$$(\mathbf{v}_0, \nabla \rho) = -(\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \mathcal{Q}_h \rho)_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (\rho - \mathcal{Q}_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T}. \quad (5.5.9)$$

对 (5.5.5) 两边作用 \mathbf{v}_0 , 这里 $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} \in V_h^0$,

$$(\nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}), \mathbf{v}_0) - (\nabla \rho, \mathbf{v}_0) = (\eta, \mathbf{v}_0). \quad (5.5.10)$$

由分部积分, 以及 $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu \mathbf{v}_b \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{w} \rangle_{\partial T} = 0$,

$$(\nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}), \mathbf{v}_0) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nu \nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{v}_0)_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{w} \rangle_{\partial T},$$

由 (5.5.8) 以及上述方程,

$$\begin{aligned} (\nu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}), \mathbf{v}_0) &= (\nu \nabla_w \times (Q_h \mathbf{w}), \nabla_w \times \mathbf{v})_h \\ &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}) \rangle_{\partial T}. \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

将 (5.5.9) 和 (5.5.11) 代入 (5.5.10), 引理得证. \square

引理5.5.3. (5.5.3)-(5.5.4) 定义的 \mathbf{e}_h, ϵ_h 为 WG 算法 (5.4.1)-(5.4.2) 的误差函数. 那么, 对任意的 $\mathbf{v} \in V_h^0, q \in W_h$, 成立

$$a(\mathbf{e}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \epsilon_h) = \varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v}), \quad (5.5.12)$$

$$b(\mathbf{e}_h, q) = 0, \quad (5.5.13)$$

其中, $\varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v})$ 是弱有限元空间 V_h^0 中的线性函数, 定义为

$$\varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v}) = l_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \theta_p(\mathbf{v}) + s(Q_h \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

证明 在 (5.5.5) 中取 $\eta = \mathbf{f}$, 由引理 5.5.2,

$$(\nu \nabla_w \times (Q_h \mathbf{u}), \nabla_w \times \mathbf{v})_h + (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, Q_h p)_h = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0) + l_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \theta_p(\mathbf{v}).$$

在上述方程两边加上 $s(Q_h \mathbf{u}, \mathbf{v})$,

$$a(Q_h \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, Q_h p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0) + l_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \theta_p(\mathbf{v}) + s(Q_h \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (5.5.14)$$

(5.5.14) 减去 (5.4.1), (5.5.12) 得证.

(5.3.2) 两边作用 $q \in W_h$, 由 (5.5.1),

$$(g, q) = (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_h = (Q_h(\nabla \cdot \mathbf{u}), q)_h = (\nabla_w \cdot (Q_h \mathbf{u}), q)_h. \quad (5.5.15)$$

(5.5.15) 减去 (5.4.2), (5.5.13) 得证. \square

5.6 技术引理

本节的目标在于建立 WG 有限元方法的误差分析中用到的基本估计.

引理 5.6.1. [52] 假设 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 的正则剖分, 具体可参考定义 1.4.1. 假设 $1 \leq r \leq k$, $\mathbf{w} \in [H^{r+1}(\Omega)]^d$, $\rho \in H^r(\Omega)$. 对 $0 \leq m \leq 1$, 存在常数 C , 使得

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2m} \|\mathbf{w} - Q_0 \mathbf{w}\|_{T,m}^2 \leq Ch^{2(r+1)} \|\mathbf{w}\|_{r+1}^2, \quad (5.6.1)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2m} \|\nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w})\|_{T,m}^2 \leq Ch^{2r} \|\mathbf{w}\|_{r+1}^2, \quad (5.6.2)$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{2m} \|\rho - Q_h \rho\|_{T,m}^2 \leq Ch^{2r} \|\rho\|_r^2. \quad (5.6.3)$$

引理 5.6.2. 假设 \mathcal{T}_h 是区域 Ω 的正则剖分, 具体可参考定义 1.4.1. 假设 $1 \leq r \leq k$, $\mathbf{w} \in [H^{r+1}(\Omega)]^3$, $\rho \in H^r(\Omega)$, $\mathbf{v} \in V_h$. 存在常数 C , 使得

$$|s(Q_h \mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq Ch^r \|\mathbf{w}\|_{r+1} \|\mathbf{v}\|, \quad (5.6.4)$$

$$|l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})| \leq Ch^r \|\mathbf{w}\|_{r+1} \|\mathbf{v}\|, \quad (5.6.5)$$

$$|\theta_{\rho}(\mathbf{v})| \leq Ch^r \|\rho\|_r \|\mathbf{v}\|, \quad (5.6.6)$$

其中 $l_{\mathbf{w}}(\cdot)$, $\theta_{\rho}(\cdot)$ 为 (5.5.6), (5.5.7) 定义的线性函数.

证明 由 Cauchy-Schwarz 不等式, (1.4.10), (5.6.1),

$$\begin{aligned}
 |s(Q_h \mathbf{w}, \mathbf{v})| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_0 \mathbf{w} - Q_b \mathbf{w}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(Q_0 \mathbf{w}) - Q_b \mathbf{w}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_0 \mathbf{w} - \mathbf{w}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_0 \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|Q_0 \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_T^2 + |Q_0 \mathbf{w} - \mathbf{w}|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch^r \|\mathbf{w}\|_{r+1} \|\mathbf{v}\|,
 \end{aligned}$$

(5.6.4) 得证.

由 Cauchy-Schwarz 不等式, (1.4.10), (5.6.2),

$$\begin{aligned}
 |l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}) \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w})\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch^r \|\mathbf{w}\|_{r+1} \|\mathbf{v}\|,
 \end{aligned}$$

(5.6.5) 得证.

由 Cauchy-Schwarz 不等式, (1.4.10), (5.6.3),

$$\theta_{\rho}(\mathbf{v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, (\rho - \mathcal{Q}_h \rho) \mathbf{n} \rangle_{\partial T}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\rho - \mathcal{Q}_h \rho\|_{\mathbf{n}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch^r \|\rho\|_r \|\mathbf{v}\|,
 \end{aligned}$$

(5.6.6) 得证. 引理得证. \square

引理5.6.3. [36] 令 $k \geq 1$. 假设 $(\mathbf{u}; p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^3 \times H^k(\Omega)$ 和 $(\mathbf{u}_h; p_h) \in V_h \times W_h$ 分别为静态麦克斯韦方程组 (5.3.1)-(5.3.4) 和 WG 算法 (5.4.1)-(5.4.2) 的解. 存在常数 C , 使得

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \cdot \mathbf{e}_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k).$$

引理5.6.4. 对任意的 $q \in W_h$, 定义弱有限元空间 V_h^0 中的函数 $\mathbf{v}_q = h^2 \{\nabla q, 0\}$. 存在常数 C , 使得

$$\|\mathbf{v}_q\| \leq Ch \|\nabla q\|_{0,h}. \quad (5.6.7)$$

证明 由 (5.7.1),

$$\|\mathbf{v}_q\|^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \nu \|\nabla_w \times \mathbf{v}_q\|_T^2 + h_T^{-1} \|h^2 \nabla q\|_{\partial T}^2. \quad (5.6.8)$$

对于 (5.6.8) 右端第二项, 由迹不等式 (1.4.24),

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|h^2 \nabla q\|_{\partial T}^2 \leq Ch^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla q\|_T^2. \quad (5.6.9)$$

对于 (5.6.8) 右端第一项, 由 (5.3.8), Cauchy-Schwarz 不等式以及逆不等式

(1.4.23),

$$\begin{aligned}
 \|\nabla_w \times \mathbf{v}_q\|_T &= \sup_{0 \neq \varphi \in [P_{k-1}(T)]^3} \frac{(\nabla_w \times \mathbf{v}_q, \varphi)_T}{\|\varphi\|_T} \\
 &= \sup_{0 \neq \varphi \in [P_{k-1}(T)]^3} \frac{(h^2 \nabla q, \nabla \times \varphi)_T}{\|\varphi\|_T} \\
 &\leq \sup_{0 \neq \varphi \in [P_{k-1}(T)]^3} \frac{h^2 \|\nabla q\|_T \|\nabla \times \varphi\|_T}{\|\varphi\|_T} \\
 &\leq \sup_{0 \neq \varphi \in [P_{k-1}(T)]^3} \frac{h^2 \|\nabla q\|_T \|\nabla \varphi\|_T}{\|\varphi\|_T} \\
 &\leq Ch \|\nabla q\|_T,
 \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \nu \|\nabla_w \times \mathbf{v}_q\|_T^2 \leq Ch^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla q\|_T^2. \quad (5.6.10)$$

由 (5.6.9), (5.6.10), 引理得证. \square

引理 5.6.5. 对任意的 $q \in W_h$, 定义弱有限元空间 V_h^0 中的函数 $\mathbf{v}'_q = h\{0, \llbracket q \rrbracket_e \mathbf{n}\}$. 存在常数 C , 使得

$$\|\mathbf{v}'_q\| \leq C |q|_{0,h}, \quad (5.6.11)$$

其中 $e \in \mathcal{E}_h^0$, \mathbf{n} 是 ∂e 的单位外法向.

证明 由 (5.7.1),

$$\|\mathbf{v}'_q\|^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \nu \|\nabla_w \times \mathbf{v}'_q\|_T^2 + h_T^{-1} \|h \llbracket q \rrbracket_e \mathbf{n}\|_{\partial T}^2. \quad (5.6.12)$$

对于 (5.6.12) 右端第二项,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|h \llbracket q \rrbracket_e \mathbf{n}\|_{\partial T}^2 \leq Ch \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \|\llbracket q \rrbracket_e\|_e^2. \quad (5.6.13)$$

对于 (5.6.12) 右端第一项, 由 (5.3.8),

$$(\nabla_w \times \mathbf{v}'_q, \varphi)_T = \langle h[[q]]_e \mathbf{n} \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T} = 0, \forall \varphi \in [P_{k-1}(T)]^3,$$

从而 $\nabla_w \times \mathbf{v}'_q = 0$. 因此,

$$\|\nabla_w \times \mathbf{v}'_q\|_T = 0. \quad (5.6.14)$$

由 (5.6.13), (5.6.14), 引理得证. \square

5.7 误差估计

本节将建立 WG 算法 3 的解 $(\mathbf{u}_h; p_h)$, 以及 $\mathbf{u}_h = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}$ 的分量 \mathbf{u}_0 和 \mathbf{u}_b 在各种适当定义的离散范数下的最优阶误差估计.

对任意的 $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} \in V_h^0$, 定义

$$\|\mathbf{v}\|^2 = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \nu \|\nabla_w \times \mathbf{v}\|_T^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2. \quad (5.7.1)$$

易知 $\|\cdot\|$ 定义了线性空间 V_h^0 中的一个半范. 定义

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{v}\| + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 5.4.1 的证明知 $\|\cdot\|_1$ 定义了线性空间 V_h^0 中的一个范数.

对任意的 $q \in W_h$, 定义

$$\|q\|_0 = |q|_{0,h} + h \|\nabla q\|_{0,h},$$

其中,

$$|q|_{0,h}^2 = h \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \|[q]\|_e^2,$$

$$\|\nabla q\|_{0,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla q\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

易知 $\|\cdot\|_0$ 定义了线性空间 W_h 中的一个范数.

定理5.7.1. 令 $k \geq 1$. 假设 $(\mathbf{u}; p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^3 \times H^k(\Omega)$ 和 $(\mathbf{u}_h; p_h) \in V_h \times W_h$ 分别为静态麦克斯韦方程组 (5.3.1)-(5.3.4) 和 WG 算法 (5.4.1)-(5.4.2) 的解. 存在常数 C , 使得

$$\|Q_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|Q_h p - p_h\|_0 \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (5.7.2)$$

证明 在 (5.5.12) 中取 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_h$, 在 (5.5.13) 中取 $q = \epsilon_h$, 将得到的两个方程相减,

$$\|\mathbf{e}_h\|^2 = \varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{e}_h).$$

由 (5.6.4)-(5.6.6),

$$\|\mathbf{e}_h\|^2 \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{e}_h\|, \quad (5.7.3)$$

再由引理 5.6.3,

$$\|\mathbf{e}_h\|_1 \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (5.7.4)$$

由 (5.3.7),

$$b(\mathbf{v}, q) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, q) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} -(\mathbf{v}_0, \nabla q)_T + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{\partial T}. \quad (5.7.5)$$

在 (5.7.5) 中取 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\epsilon_h} = h^2 \{-\nabla \epsilon_h, 0\}$, $q = \epsilon_h$,

$$b(\mathbf{v}_{\epsilon_h}, \epsilon_h) = h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \epsilon_h\|_T^2.$$

在 (5.5.12) 中取 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\epsilon_h}$,

$$b(\mathbf{v}_{\epsilon_h}, \epsilon_h) = -a(e_h, \mathbf{v}_{\epsilon_h}) + \varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v}_{\epsilon_h}),$$

由 (5.7.3),

$$|b(\mathbf{v}_{\epsilon_h}, \epsilon_h)| \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{v}_{\epsilon_h}\|.$$

因此,

$$h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \epsilon_h\|_T^2 \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{v}_{\epsilon_h}\|,$$

由引理 5.6.4,

$$h \|\nabla \epsilon_h\|_{0,h} \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (5.7.6)$$

在 (5.7.5) 中取 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_{\epsilon_h} = \{0, h[\epsilon_h]_e \mathbf{n}\}$, $q = \epsilon_h$, 其中 $e \in \mathcal{E}_h^0$, \mathbf{n} 是 ∂e 的单位外法向,

$$b(\mathbf{v}'_{\epsilon_h}, \epsilon_h) = h \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \|[\epsilon_h]_e\|_e^2.$$

在 (5.5.12) 中取 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_{\epsilon_h}$,

$$b(\mathbf{v}'_{\epsilon_h}, \epsilon_h) = -a(e_h, \mathbf{v}'_{\epsilon_h}) + \varphi_{\mathbf{u},p}(\mathbf{v}'_{\epsilon_h}),$$

由 (5.7.3),

$$|b(\mathbf{v}'_{\epsilon_h}, \epsilon_h)| \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{v}'_{\epsilon_h}\|.$$

因此,

$$h \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \|[\epsilon_h]_e\|_e^2 \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{v}'_{\epsilon_h}\|,$$

由引理 5.6.5,

$$\|\epsilon_h\|_{0,h} \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (5.7.7)$$

由 (5.7.6), (5.7.7),

$$\|\epsilon_h\|_0 \leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (5.7.8)$$

由 (5.7.4), (5.7.8), 定理得证. \square

接下来, 我们建立 WG 算法 3 的解 $u_h = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}$ 的分量 \mathbf{u}_0 和 \mathbf{u}_b 的 L^2 误差估计. 为此, 考虑辅助问题: 求 $(\psi; \xi)$, 满足

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \psi) - \nabla \xi = \mathbf{e}_0, \quad \text{在 } \Omega, \quad (5.7.9)$$

$$\nabla \cdot \psi = 0, \quad \text{在 } \Omega, \quad (5.7.10)$$

$$\psi \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega, \quad (5.7.11)$$

$$\xi = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega. \quad (5.7.12)$$

假设问题 (5.7.9)-(5.7.12) 具有 $[H^{1+s}(\Omega)]^3 \times H^s(\Omega)$ 正则性, 其中 $0 < s \leq 1$, 即解 $(\psi; \xi) \in [H^{1+s}(\Omega)]^3 \times H^s(\Omega)$, 且满足先验估计:

$$\|\psi\|_{1+s} + \|\xi\|_s \leq C\|\mathbf{e}_0\|. \quad (5.7.13)$$

定理 5.7.2. 令 $k \geq 1$. 假设 $(\mathbf{u}; p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^3 \times H^k(\Omega)$ 和 $(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) \in V_h \times W_h$ 分别为静态麦克斯韦方程组 (5.3.1)-(5.3.4) 和 WG 算法 (5.4.1)-(5.4.2) 的解. 令 $0 < s \leq 1$. 存在常数 C , 使得

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq Ch^{k+s}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (5.7.14)$$

证明 (5.7.9) 两边作用 \mathbf{e}_0 ,

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = (\nabla \times (\nu \nabla \times \psi), \mathbf{e}_0) - (\nabla \xi, \mathbf{e}_0).$$

在 (5.5.9) 和 (5.5.11) 中, 分别取 $\mathbf{w}, \rho, \mathbf{v}$ 为 ψ, ξ, \mathbf{e}_h , 上述方程为

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 = (\nu \nabla_w \times (Q_h \psi), \nabla_w \times \mathbf{e}_h)_h + (\nabla_w \cdot \mathbf{e}_h, Q_h \xi)_h - \theta_\xi(\mathbf{e}_h) - l_\psi(\mathbf{e}_h).$$

在上述方程中加上和减去 $s(Q_h \psi, \mathbf{e}_h)$,

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 = a(Q_h \psi, \mathbf{e}_h) + b(\mathbf{e}_h, Q_h \xi) - \varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h), \quad (5.7.15)$$

其中 $\varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h) = \theta_\xi(\mathbf{e}_h) + l_\psi(\mathbf{e}_h) + s(Q_h \psi, \mathbf{e}_h)$.

由误差方程 (5.5.13),

$$b(\mathbf{e}_h, Q_h \xi) = 0.$$

由 (5.3.7), 分部积分, 以及 (5.7.10),

$$\begin{aligned}
 b(Q_h\psi, \epsilon_h) &= (\nabla_w \cdot Q_h\psi, \epsilon_h)_h \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} -(Q_0\psi, \nabla\epsilon_h)_T + \langle Q_b\psi \cdot \mathbf{n}, \epsilon_h \rangle_{\partial T} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} -(\psi, \nabla\epsilon_h)_T + \langle \psi \cdot \mathbf{n}, \epsilon_h \rangle_{\partial T} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

由 (5.5.12), (5.7.15) 可化简为

$$\begin{aligned}
 \|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 &= a(Q_h\psi, \mathbf{e}_h) + b(Q_h\psi, \epsilon_h) - \varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h) \\
 &= \varphi_{\mathbf{u}, p}(Q_h\psi) - \varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h).
 \end{aligned} \tag{5.7.16}$$

对于 (5.7.16) 右端第二项 $\varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h)$, 由 (5.6.4)-(5.6.6), (5.7.3), (5.7.13),

$$\begin{aligned}
 |\varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h)| &\leq Ch^s(\|\psi\|_{s+1} + \|\xi\|_s)\|\mathbf{e}_h\| \\
 &\leq Ch^{k+s}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k)\|\mathbf{e}_0\|.
 \end{aligned} \tag{5.7.17}$$

对于 (5.7.16) 右端第一项 $\varphi_{\mathbf{u}, p}(Q_h\psi)$, 其每一项可以估计如下.

(i) 对于 $s(Q_h\mathbf{u}, Q_h\psi)$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), (5.6.1),

$$\begin{aligned}
 |s(Q_h\mathbf{u}, Q_h\psi)| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_0\mathbf{u} - Q_b\mathbf{u}, Q_0\psi - Q_b\psi \rangle_{\partial T} \right| \\
 &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_b(Q_0\mathbf{u}) - Q_b\mathbf{u}, Q_b(Q_0\psi) - Q_b\psi \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_0\psi - \psi\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch^k \|u\|_{k+1} h^s \|\psi\|_{s+1}.
 \end{aligned}$$

(ii) 对于 $l_{\mathbf{u}}(Q_h\psi)$, 由于在 $\partial\Omega$ 上, $\psi \times \mathbf{n} = 0$,

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu(Q_b\psi - \psi) \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{u}) \rangle_{\partial T} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu(Q_b\psi - \psi) \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{u} \rangle_{\partial T} = 0. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), (5.6.1), (5.6.2),

$$\begin{aligned} |l_{\mathbf{u}}(Q_h\psi)| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu(Q_0\psi - Q_b\psi) \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{u}) \rangle_{\partial T} \right| \\ &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nu(Q_0\psi - \psi) \times \mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{u}) \rangle_{\partial T} \right| \\ &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{u})\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|(Q_0\psi - \psi) \times \mathbf{n}\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ch^k \|u\|_{k+1} h^s \|\psi\|_{s+1}. \end{aligned}$$

(iii) 对于 $\theta_p(Q_h\psi)$, 由于在 $\partial\Omega$ 上, $\psi \times \mathbf{n} = 0$,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle Q_b\psi - \psi, (p - \mathcal{Q}_hp)\mathbf{n} \rangle_{\partial T} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle Q_b\psi - \psi, p\mathbf{n} \rangle_{\partial T} = 0.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), (5.6.1), (5.6.3),

$$\begin{aligned} |\theta_p(Q_h\psi)| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle Q_0\psi - Q_b\psi, (p - \mathcal{Q}_hp)\mathbf{n} \rangle_{\partial T} \right| \\ &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle Q_0\psi - \psi, (p - \mathcal{Q}_hp)\mathbf{n} \rangle_{\partial T} \right| \\ &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|p - \mathcal{Q}_hp\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_0\psi - \psi\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ch^k \|p\|_k h^s \|\psi\|_{s+1}. \end{aligned}$$

由(i), (ii), (iii), (5.7.13),

$$\begin{aligned} |\varphi_{\mathbf{u},p}(Q_h\psi)| &\leq Ch^{k+s}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k)\|\psi\|_{s+1} \\ &\leq Ch^{k+s}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k)\|\mathbf{e}_0\|. \end{aligned} \quad (5.7.18)$$

将 (5.7.17), (5.7.18) 代入 (5.7.16), 定理得证. \square

定理5.7.3. 令 $k \geq 1$. 假设 $(\mathbf{u}; p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^3 \times H^k(\Omega)$ 和 $(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) \in V_h \times W_h$ 分别为静态麦克斯韦方程组 (5.3.1)-(5.3.4) 和 WG 算法 (5.4.1)-(5.4.2) 的解. 令 $0 < s \leq 1$. 定义

$$\|\mathbf{e}_b\| = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \int_{\partial T} \mathbf{e}_b^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

存在常数 C , 使得

$$\|Q_b \mathbf{u} - \mathbf{u}_b\| \leq Ch^{k+s}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (5.7.19)$$

证明 在误差方程 (5.5.12) 中, 取 $\mathbf{v} = \{0, \mathbf{e}_b\}$,

$$(\nu \nabla_w \times \mathbf{e}_h, \nabla_w \times \mathbf{v})_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{e}_b - \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b \rangle_{\partial T} + (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \epsilon_h)_h = \varphi_{\mathbf{u},p}(\mathbf{v}).$$

上式可化简为

$$\begin{aligned} &\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b \rangle_{\partial T} - (\nu \nabla_w \times \mathbf{e}_h, \nabla_w \times \mathbf{v})_h \\ &\quad - (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \epsilon_h)_h + \varphi_{\mathbf{u},p}(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (5.7.20)$$

(5.7.20) 右端四项分别如下估计. 对于 (5.7.20) 右端第一项, 由 Cauchy-Schwarz

不等式, 迹不等式 (1.4.10), 逆不等式 (1.4.23),

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b \rangle_{\partial T} \right| \\
 & \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|\mathbf{e}_0\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-4} \|\mathbf{e}_0\|_T^2 + h_T^{-2} \|\nabla \mathbf{e}_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_b\| \\
 & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-4} \|\mathbf{e}_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_b\|.
 \end{aligned} \tag{5.7.21}$$

对于 (5.7.20) 右端第二项, 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|(\nu \nabla_w \times \mathbf{e}_h, \nabla_w \times \mathbf{v})_h| \leq \|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| \|\nabla_w \times \mathbf{v}\|. \tag{5.7.22}$$

在每个单元 T , 由 (5.3.8), Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.24) 知, 对任意的 $\varphi \in [P_{k-1}(T)]^3$,

$$\begin{aligned}
 |(\nabla_w \times \mathbf{v}, \varphi)_T| &= |\langle \mathbf{e}_b \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T}| \\
 &\leq \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T} \|\varphi\|_{\partial T} \\
 &\leq Ch_T^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T} \|\varphi\|_T.
 \end{aligned}$$

从而,

$$\|\nabla_w \times \mathbf{v}\|_T \leq Ch_T^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}. \tag{5.7.23}$$

将 (5.7.23) 代入 (5.7.22),

$$|(\nu \nabla_w \times \mathbf{e}_h, \nabla_w \times \mathbf{v})_h| \leq Ch^{-1} \|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| \|\mathbf{e}_b\|. \tag{5.7.24}$$

同理,

$$|(\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \epsilon_h)_h| \leq Ch^{-1} \|\epsilon_h\| \|\mathbf{e}_b\|. \quad (5.7.25)$$

由 (5.7.1), (5.7.23),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_w \times \mathbf{v}\|_T^2 + h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 + h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 \\ &\leq Ch^{-2} \|\mathbf{e}_b\|^2. \end{aligned} \quad (5.7.26)$$

由 (5.7.26) 和引理 5.6.2,

$$\begin{aligned} |\varphi_{\mathbf{u},p}(\mathbf{v})| &\leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{v}\| \\ &\leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) h^{-1} \|\mathbf{e}_b\| \\ &\leq Ch^{k-1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{e}_b\|. \end{aligned} \quad (5.7.27)$$

由 (5.7.20), 估计 (5.7.21), (5.7.24), (5.7.25), (5.7.27),

$$\begin{aligned} \sum_T h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 &\leq C \left(\sum_T h_T^{-4} \|\mathbf{e}_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_b\| + Ch^{-1} (\|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| + \|\epsilon_h\|) \|\mathbf{e}_b\| \\ &\quad + Ch^{k-1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{e}_b\|. \end{aligned} \quad (5.7.28)$$

由有限元剖分 \mathcal{T}_h 的形状正则性假设, 易证

$$\|\mathbf{e}_b\|^2 \leq Ch^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2,$$

再由 (5.7.28),

$$\|\mathbf{e}_b\|^2 \leq C(\|\mathbf{e}_0\| + h\|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| + h\|\epsilon_h\|)\|\mathbf{e}_b\| + Ch^{k+1}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k)\|\mathbf{e}_b\|.$$

从而,

$$\|\mathbf{e}_b\| \leq C(\|\mathbf{e}_0\| + h\|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| + h\|\epsilon_h\|) + Ch^{k+1}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k).$$

由上述不等式, (5.7.14), (5.7.2) 以及

$$\|\epsilon_h\| = \|\mathcal{Q}_h p - p_h\| \leq Ch^k \|p\|_k,$$

(5.7.19) 得证. 定理得证. \square

5.8 Schur 补

WG 算法 3 的自由度为 $\mathbf{u}_h = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}$ 和 p_h . 为有效实施, 本节将推导自由度大为减少的 Schur 补形式, 即消去内部自由度 \mathbf{u}_0 , 得到一个仅与单元边界自由度 \mathbf{u}_b 和自由度 p_h 有关的方程组.

令 $(\mathbf{u}_h; p_h) \in V_h \times W_h$ 为 WG 算法 3 的解. 即 $(\mathbf{u}_h; p_h)$ 满足在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{u}_b \times \mathbf{n} = Q_b \varphi$, 且

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0), \quad \forall \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, 0\} \in V_h^0, \quad (5.8.1)$$

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v} = \{0, \mathbf{v}_b\} \in V_h^0, \quad (5.8.2)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q) = (g, q), \quad \forall q \in W_h. \quad (5.8.3)$$

记 $V_k(T)$, $W_k(T)$ 分别为弱有限元空间 V_h , W_h 在单元 T 上的限制,

$$V_k(T) = \{\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} : \mathbf{v}_0 \in [P_k(T)]^3, \mathbf{v}_b \in [P_k(e)]^3, e \subset \partial T\},$$

$$W_k(T) = \{q : q \in P_{k-1}(T)\}.$$

在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上, (5.8.1) 即为

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0) - b(\mathbf{v}, p_h), \quad \forall \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, 0\} \in V_k(T). \quad (5.8.4)$$

给定 \mathbf{u}_b 在 ∂T 上的值以及 p_h 在 T 上的值, 则在每个单元 T 局部求解 (5.8.4), 得到 \mathbf{u}_0 在单元 T 的值. 记作

$$\mathbf{u}_0 := D(\mathbf{u}_b, p_h, \mathbf{f}, g),$$

WG 算法 (5.4.1)-(5.4.2) 的解可记作

$$(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) = (\{D(\mathbf{u}_b, p_h, \mathbf{f}, g), \mathbf{u}_b\}; p_h).$$

记 $D_1(\mathbf{u}_b, p_h) = D(\mathbf{u}_b, p_h, 0, 0)$, $D_2(\mathbf{f}, g) = D(0, 0, \mathbf{f}, g)$. 由双线性型 $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ 的叠加性,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_h; p_h) &= (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) \\ &= (\{D(\mathbf{u}_b, p_h, \mathbf{f}, g), \mathbf{u}_b\}; p_h) \\ &= (\{D(\mathbf{u}_b, p_h, 0, 0), \mathbf{u}_b\}; p_h) + (\{D(0, 0, \mathbf{f}, g), 0\}; p_h) \\ &= (\{D_1(\mathbf{u}_b, p_h), \mathbf{u}_b\}; p_h) + (\{D_2(\mathbf{f}, g), 0\}; p_h). \end{aligned}$$

在 (5.8.2)-(5.8.3) 中, 由 $(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{D(\mathbf{u}_b, p_h, \mathbf{f}, g), \mathbf{u}_b\}; p_h)$,

$$a(\{D_1(\mathbf{u}_b, p_h), \mathbf{u}_b\}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = \varsigma_1(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} = \{0, \mathbf{v}_b\} \in V_h^0, \quad (5.8.5)$$

$$b(\{D_1(\mathbf{u}_b, p_h), \mathbf{u}_b\}, q) = \varsigma_2(q), \quad \forall q \in W_h, \quad (5.8.6)$$

其中

$$\varsigma_1(\mathbf{v}) = -a(\{D_2(\mathbf{f}, g), 0\}; \mathbf{v}),$$

$$s_2(q) = (g, q) - b(\{D_2(\mathbf{f}, g), 0\}; q).$$

方程组 (5.8.5)-(5.8.6) 称为 **WG 算法 3** 的 Schur 补, 此为关于单元边界自由度 \mathbf{u}_b 和自由度 p_h 的方阵问题.

综上所述, 高效实施 **WG 算法 3** 的步骤如下:

步1. 求解 (5.8.5)-(5.8.6), 得到 (\mathbf{u}_b, p_h) , 且在 $\partial\Omega$, $\mathbf{u}_b \times n = Q_b\varphi$.

步2. 在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上局部求解 (5.8.4), 得到 $\mathbf{u}_0 = D(\mathbf{u}_b, p_h, \mathbf{f}, g)$.

第 6 章 Div-Curl 问题的弱有限元方法

本章提出求解一类 div-curl 问题的 WG 有限元方法. 我们通过 Helmholtz 分解将 div-curl 问题分解为一个二阶椭圆问题和一个静态麦克斯韦方程组. 对一类 div-curl 边值问题, 所对应的麦克斯韦方程组的边界条件不同于第五章所研究的麦克斯韦方程组问题. 本章的主要目的是提出求解 Helmholtz 分解后得到的静态麦克斯韦方程组的 WG 有限元方法, 并建立最优阶误差估计理论.

6.1 Div-Curl 问题及其分解

假设 Ω 是 \mathbb{R}^3 中非空、有界、连通的多面体开子集, Ω 的边界记作 $\partial\Omega$. 给定区域 Ω 上的 Lebesgue 可积实值函数 $f = f(\mathbf{x})$, 向量 $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, 以及边界条件. 考虑 div-curl 问题: 求 \mathbf{u} , 满足

$$\nabla \cdot (a(\mathbf{x})\mathbf{u}) = f(\mathbf{x}), \quad \text{在 } \Omega, \quad (6.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \text{在 } \Omega, \quad (6.1.2)$$

其中 $a(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))$ 是区域 Ω 上对称、一致正定的 3×3 矩阵.

方程组 (6.1.1)-(6.1.2) 起源于流体力学和电磁场理论. 在流体力学理论中, 系数矩阵 $a(\mathbf{x})$ 是对角矩阵, 其对角元素是局部质量密度. 在静电学理论中, 系数矩阵 $a(\mathbf{x})$ 是电容率矩阵. 在线性磁场理论中, 函数 $f(\mathbf{x})$ 为 0, \mathbf{u} 表示磁场强度, $a(\mathbf{x})$ 是磁导率张量的逆.

考虑 div-curl 问题 (6.1.1)-(6.1.2) 的两类边界条件. I 型边界条件: 给定向量 \mathbf{u} 在边界 $\partial\Omega$ 上的流量值, 即

$$(a(\mathbf{x})\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mu(\mathbf{x}), \quad \text{在 } \partial\Omega. \quad (6.1.3)$$

II 型边界条件: 给定向量 \mathbf{u} 的切向分量的值, 即

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \eta(\mathbf{x}), \quad \text{在 } \partial\Omega. \quad (6.1.4)$$

边界值为 (6.1.3) 或 (6.1.4) 的 div-curl 问题 (6.1.1)-(6.1.2) 可以分解为一个二阶椭圆方程和一个静态麦克斯韦方程组. 为此, 首先介绍 Helmholtz 分解. L^2 中任意向量值函数 \mathbf{q} 可以分解为

$$\mathbf{q} = \nabla\phi + \nabla \times \psi,$$

其中 ϕ 是标量函数, ψ 是向量函数, 且满足 $(\nabla\phi, \nabla \times \psi) = 0$.

6.1.1 I 型边值问题的分解

假设边界值为 (6.1.3) 的 div-curl 问题 (6.1.1)-(6.1.2) 有解, 将 (6.1.1) 在区域 Ω 上积分, 由分部积分,

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (a\mathbf{u}) dx = \int_{\partial\Omega} a\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds,$$

由边界条件 (6.1.3), 得到相容性条件,

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\partial\Omega} \mu ds. \quad (6.1.5)$$

对 (6.1.2) 取散度, 得到第二个相容性条件,

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = 0. \quad (6.1.6)$$

定理 6.1.1. 假设 $\Psi \in H_0(\text{curl}; \Omega)$ 和 $\Phi \in H^1(\Omega)$ 是以下方程组的解,

$$(\nabla \times \Psi, \nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}; \Omega), \quad (6.1.7)$$

$$(a\nabla\Phi, \nabla v) = \langle \mu, v \rangle - (a\nabla \times \Psi, \nabla v) - (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (6.1.8)$$

令

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi. \quad (6.1.9)$$

那么, \mathbf{u} 是边界值为 (6.1.3) 的问题 (6.1.1)-(6.1.2) 的解.

证明 由相容性条件 (6.1.6) 和 (6.1.5) 知, 方程组 (6.1.7)-(6.1.8) 存在解. 由 (6.1.7),

$$\nabla \times (\nabla \times \Psi) = \mathbf{g}, \text{ 在 } \Omega. \quad (6.1.10)$$

同理, 由 (6.1.8),

$$-\nabla \cdot (a\nabla\Phi) = \nabla \cdot (a\nabla \times \Psi) - f, \text{ 在 } \Omega, \quad (6.1.11)$$

$$a\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \mu - a\nabla \times \Psi \cdot \mathbf{n}, \text{ 在 } \partial\Omega. \quad (6.1.12)$$

对 (6.1.9) 取旋度,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \nabla\Phi + \nabla \times (\nabla \times \Psi) = 0 + \mathbf{g} = \mathbf{g},$$

此即为 (6.1.2). 将 (6.1.9) 乘以矩阵 a 后再取散度, 由 (6.1.11),

$$\nabla \cdot (a\mathbf{u}) = \nabla \cdot (a\nabla\Phi) + \nabla \cdot (a\nabla \times \Psi) = f.$$

此即为 (6.1.1). 由 (6.1.12) 知边界条件 (6.1.3) 成立. 定理得证. \square

(6.1.8) 的解 Φ 在相差一个常数的意义下是唯一确定的. 问题 (6.1.7) 的解 Ψ 不唯一, 其解可以表示为 $\Psi + \psi$, 其中 ψ 的旋度为 0 且满足边界条件 $\psi \times \mathbf{n} = 0$, 此 ψ 构成的集合为 $\nabla H_0^1(\Omega)$. 也即, 问题 (6.1.7) 在商空间

$$S = H_0(\text{curl}; \Omega) / (\nabla H_0^1(\Omega)) = \{\psi \in H_0(\text{curl}; \Omega) : (\psi, \nabla p) = 0, \quad \forall p \in H_0^1(\Omega)\}$$

中存在唯一解. 引入 Lagrange 乘子, 问题 (6.1.7) 即为: 求 $\Psi \in H_0(\text{curl}; \Omega)$,

$p \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$(\nabla \times \Psi, \nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}; \Omega), \quad (6.1.13)$$

$$(\nabla s, \Psi) = 0, \quad \forall s \in H_0^1(\Omega). \quad (6.1.14)$$

由 (6.1.14),

$$\nabla \cdot \Psi = 0.$$

因此, 线性方程组 (6.1.13)-(6.1.14) 即为: 求 $\Psi \in H_0(\text{curl}; \Omega) \cap H(\text{div}; \Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$, 使得

$$(\nabla \times \Psi, \nabla \times \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{curl}; \Omega) \cap H(\text{div}; \Omega), \quad (6.1.15)$$

$$(\nabla \cdot \Psi, s) = 0, \quad \forall s \in L^2(\Omega). \quad (6.1.16)$$

6.1.2 II 型边值问题的分解

假设边界值为 (6.1.4) 的 div-curl 问题 (6.1.1)-(6.1.2) 有解, 将 (6.1.2) 两边乘以 $\mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega)$, 并在区域 Ω 上积分,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{g} \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} \mathbf{v} dx \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dx - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} ds. \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

将边界条件 (6.1.4) 代入 (6.1.17), 得到相容性条件: 对任意的 $\mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega)$ 满足在 Ω 上, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, 且

$$\int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\partial\Omega} \eta \cdot \mathbf{v} ds. \quad (6.1.18)$$

定理 6.1.2. 令 $\alpha = a^{-1}$ 为矩阵 a 的逆矩阵. 令 $\Phi \in H_0^1(\Omega)$ 和 $\Psi \in H(\text{curl}; \Omega)$ 为以下方程组的解,

$$(\nabla \Phi, \nabla v) = -(f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (6.1.19)$$

$$(\alpha \nabla \times \Psi, \nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}) + \langle \eta, \mathbf{v} \rangle - (\alpha \nabla \Phi, \nabla \times \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega). \quad (6.1.20)$$

令

$$\mathbf{u} = \alpha(\nabla \Phi + \nabla \times \Psi). \quad (6.1.21)$$

那么, \mathbf{u} 是边界值为 (6.1.4) 的问题 (6.1.1)-(6.1.2) 的解.

证明 变分问题 (6.1.19) 显然有且仅有一个解 Φ , 满足 $\Delta \Phi = f$. 因此, 由 (6.1.21),

$$\nabla \cdot (a\mathbf{u}) = \Delta \Phi = f,$$

(6.1.1) 得证.

由相容性条件 (6.1.18), 变分问题 (6.1.20) 存在解 Ψ , 满足

$$\nabla \times (\alpha \nabla \times \Psi) = \mathbf{g} - \nabla \times (\alpha \nabla \Phi), \quad \text{在 } \Omega, \quad (6.1.22)$$

$$(\alpha \nabla \times \Psi) \times \mathbf{n} = \eta - (\alpha \nabla \Phi) \times \mathbf{n}, \quad \text{在 } \partial\Omega. \quad (6.1.23)$$

由 (6.1.22) 知旋度方程 (6.1.2) 成立, 由 (6.1.23) 知边界条件 (6.1.4) 成立. 定理得证. \square

问题 (6.1.20) 的解 Ψ 不唯一, 其解可以表示为 $\Psi + \psi$, 其中 ψ 是旋度为 0 的函数, 此 ψ 构成的集合是 $\nabla H^1(\Omega)$. 也即, 问题 (6.1.20) 在商空间

$$\tilde{S} = H(\text{curl}; \Omega) / (\nabla H^1(\Omega)) = \{\mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega) : (\mathbf{v}, \nabla p) = 0 \quad \forall p \in H^1(\Omega)\}$$

中存在唯一解. 引入 Lagrange 乘子, 问题 (6.1.20) 即为: 求 $\mathbf{u} \in H(\text{curl}; \Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$, 使得对任意的 $\mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega)$, $s \in H^1(\Omega)$, 满足

$$(\alpha \nabla \times \Psi, \nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}) + \langle \eta, \mathbf{v} \rangle - (\alpha \nabla \Phi, \nabla \times \mathbf{v}), \quad (6.1.24)$$

$$(\nabla s, \Psi) = 0. \quad (6.1.25)$$

注意 p 在相差一个常数的意义下是唯一确定的.

由 (6.1.25),

$$\nabla \cdot \Psi = 0, \quad \text{在 } \Omega,$$

$$\Psi \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega.$$

因此, 问题 (6.1.24)-(6.1.25) 即为: 求 $\Psi \in H(\text{curl}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$, $p \in L_0^2(\Omega)$, 使得对任意的 $\mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)$, $s \in L_0^2(\Omega)$, 满足

$$(\alpha \nabla \times \Psi, \nabla \times \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}) + \langle \eta, \mathbf{v} \rangle - (\alpha \nabla \Phi, \nabla \times \mathbf{v}), \quad (6.1.26)$$

$$(\nabla \cdot \Psi, s) = 0. \quad (6.1.27)$$

6.1.3 研究的中心问题

定理 6.1.1 和 6.1.2 表明边界值为 (6.1.3) 或 (6.1.4) 的 div-curl 问题 (6.1.1)-(6.1.2) 的解可以通过有序求解二阶椭圆问题和静态麦克斯韦方程组得到. 我们重点讨论的是求解静态麦克斯韦方程组的数值方法. 对于边界值为 (6.1.3) 的 div-curl 问题 (6.1.1)-(6.1.2) 分解得到的静态麦克斯韦方程组的 WG 有限元方法已经在第五章做了深入详细讨论. 本章重点讨论边界值为 (6.1.4) 的 div-curl 问题 (6.1.1)-(6.1.2) 分解得到的静态麦克斯韦方程组的 WG 有限元方法.

为简单起见, 考虑模型问题: 求 $(\mathbf{u}, p) \in [H(\text{curl}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega)] \times L_0^2(\Omega)$, 满足

$$(\nu \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{curl}; \Omega) \cap H_0(\text{div}; \Omega), \quad (6.1.28)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (6.1.29)$$

其中 $\nu = \{\nu_{ij}\}_{d \times d}$ 是 Ω 中的对称正定矩阵.

本章余下部分假设 ν 是单位矩阵 I , 不难看出, 所有分析和结果都可以推广到 ν 是分片光滑的情形.

6.2 弱有限元方法

模型问题 (6.1.28)-(6.1.29) 涉及两个微分算子: 散度和旋度. 弱散度、弱旋度, 及其离散形式的定义的内容可参考本文 5.3 节.

注6.2.1. 假设 \mathbf{v}_0 充分光滑, 使得 $\nabla \cdot \mathbf{v}_0 \in L^2(T)$. 由分部积分以及 (5.3.7),

$$\begin{aligned} (\nabla_{w,r,K} \cdot \mathbf{v}, \varphi)_K &= (\nabla \cdot \mathbf{v}_0, \varphi)_K - \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}_0, \varphi)_K + \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K}, \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

对任意的 $\varphi \in [P_r(K)]^3$.

注6.2.2. 对 (5.3.8) 右端第一项使用分部积分, 若 $\nabla \times \mathbf{v}_0 \in L^2(K)$,

$$\begin{aligned} (\nabla_{w,r,K} \times \mathbf{v}, \varphi)_K &= (\nabla \times \mathbf{v}_0, \varphi)_K - \langle \mathbf{v}_0, \varphi \times \mathbf{n} \rangle_{\partial K} - \langle \mathbf{v}_b \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K} \\ &= (\nabla \times \mathbf{v}_0, \varphi)_K - \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial K}, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

对任意的 $\varphi \in [P_r(K)]^3$.

令 \mathcal{T}_h 为区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 的一个多面体有限元剖分. 假设 \mathcal{T}_h 形状正则, 具体见定义 1.4.1. 记 \mathcal{E}_h 为 \mathcal{T}_h 中所有面的集合, $\mathcal{E}_h^0 = \mathcal{E}_h \setminus \partial\Omega$ 为 \mathcal{T}_h 中所有内部面的集合.

给定整数 $k \geq 1$, 记 $V_k(T)$ 为 T 上的离散弱函数空间, 即

$$V_k(T) = \{\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} : \mathbf{v}_0 \in [P_k(T)]^3, \mathbf{v}_b \in [P_k(e)]^3, e \subset \partial T\}.$$

定义 Ω 上弱有限元空间 \mathcal{V}_h 和 \mathcal{W}_h 为

$$\mathcal{V}_h = \{\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} : \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\}|_T \in V_k(T), \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}|_e = 0, e \subset \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{W}_h = \{q : q \in L_0^2(\Omega), q|_T \in P_{k-1}(T)\}.$$

引入双线性形式

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nabla_w \times \mathbf{v}, \nabla_w \times \mathbf{w})_h + s(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$b(\mathbf{v}, q) = (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, q)_h,$$

其中

$$(\nabla_w \times \mathbf{v}, \nabla_w \times \mathbf{w})_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \times \mathbf{v}, \nabla_w \times \mathbf{w})_T,$$

$$(\nabla_w \cdot \mathbf{v}, q)_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, q)_T,$$

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b, \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_b \rangle_{\partial T}.$$

弱 Galerkin 算法4. 求解静态麦克斯韦方程组 (6.1.28)-(6.1.29) 的数值算法为:

求 $(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$, 满足

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0), \quad \forall \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} \in \mathcal{V}_h, \quad (6.2.3)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{W}_h. \quad (6.2.4)$$

6.3 稳定性条件

对 $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} \in \mathcal{V}_h$, 定义

$$\|\mathbf{v}\| = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_w \times \mathbf{v}\|_T^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.3.1)$$

易知 $\|\mathbf{v}\|^2 = a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, 且 $\|\cdot\|$ 定义了线性空间 \mathcal{V}_h 中的一个半范数. 定义

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \|\mathbf{v}\| + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_w \cdot \mathbf{v}\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.3.2)$$

引理6.3.1. (6.3.2) 定义的 $\|\cdot\|_1$ 是线性空间 \mathcal{V}_h 中的一个范数.

证明 易知 $\|\cdot\|_1$ 定义了线性空间 \mathcal{V}_h 中的一个半范. 假设存在 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$, 使得 $\|\mathbf{v}\|_1 = 0$. 那么,

$$\nabla_w \times \mathbf{v} = 0, \quad \text{在 } T, \quad (6.3.3)$$

$$\nabla_w \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{在 } T, \quad (6.3.4)$$

$$\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b = 0, \quad \text{在 } \partial T. \quad (6.3.5)$$

由 (6.3.3), (6.2.2), (6.3.5), 对任意的 $\varphi \in [P_{k-1}(T)]^3$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_w \times \mathbf{v}, \varphi)_T \\ &= (\nabla \times \mathbf{v}_0, \varphi)_T - \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla \times \mathbf{v}_0, \varphi)_T. \end{aligned}$$

故在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$, $\nabla \times \mathbf{v}_0 = 0$. 再由 (6.3.5) 知 $\mathbf{v}_0 \in H(\text{curl}; \Omega)$, 且

$$\nabla \times \mathbf{v}_0 = 0, \quad \text{在 } \Omega.$$

因此, 存在位势函数 $\rho \in H^1(\Omega)$, 使得

$$\mathbf{v}_0 = \nabla \rho. \quad (6.3.6)$$

同理, 由 (6.3.4), (6.2.1), (6.3.5), 对任意的 $\varphi \in P_{k-1}(T)$,

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \varphi)_T \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}_0, \varphi)_T + \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}_0, \varphi)_T, \end{aligned}$$

故在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$, $\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0$. 再由 (6.3.5) 知 $\mathbf{v}_0 \in H(\text{div}; \Omega)$, 且

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad \text{在 } \Omega.$$

由上式和 (6.3.6),

$$\Delta \rho = 0, \quad \text{在 } \Omega. \quad (6.3.7)$$

由 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$ 知在 $\partial\Omega$ 上 $\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} = 0$. 因此, 由 (6.3.5), (6.3.6),

$$\nabla \rho \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega. \quad (6.3.8)$$

边界值为 (6.3.8) 的方程 (6.3.7) 存在唯一的常数解 $\rho = C$. 由 (6.3.6), $\mathbf{v}_0 = 0$. 从而, $\mathbf{v}_b = 0$. 因此, $\mathbf{v} = 0$. 引理得证. \square

在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$, 记 Q_0 为到 $[P_k(T)]^3$ 的 L^2 投影. 在每个面 $e \subset \partial T$, 记 Q_b 为到 $[P_k(e)]^3$ 的 L^2 投影. 记 $Q_h \mathbf{u}$ 为到弱有限元空间 \mathcal{V}_h 的 L^2 投影, 使得在每个单元 $T \in \mathcal{T}_h$,

$$Q_h \mathbf{u} = \{Q_0 \mathbf{u}, Q_b \mathbf{u}\}.$$

记 Q_h, \mathbf{Q}_h 分别为到 $P_{k-1}(T), [P_{k-1}(T)]^3$ 的 L^2 投影.

引理 6.3.2. (inf-sup 条件) 存在与 h 无关的正常数 β , 使得

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}, \rho)}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \beta \|\rho\|, \quad \forall \rho \in \mathcal{W}_h. \quad (6.3.9)$$

证明 对任意的 $\rho \in \mathcal{W}_h \subset L_0^2(\Omega)$, 取向量值函数 $\tilde{\mathbf{v}} \in [H_0^1(\Omega)]^3$, 使得

$$\frac{(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \rho)}{\|\tilde{\mathbf{v}}\|_1} \geq C \|\rho\|, \quad (6.3.10)$$

其中 $C > 0$ 是仅依赖于区域 Ω 的常数. 取 $\mathbf{v} = Q_h \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_h$, 我们需证明: 存在常数 C_0 , 使得

$$\|\mathbf{v}\|_1 \leq C_0 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1. \quad (6.3.11)$$

若 (6.3.11) 成立, 由 (5.5.1),

$$\begin{aligned}
 b(\mathbf{v}, \rho) &= (\nabla_w \cdot (Q_h \tilde{\mathbf{v}}), \rho) \\
 &= (Q_h(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}), \rho) \\
 &= (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \rho).
 \end{aligned}$$

因此, 存在正常数 β , 使得

$$\frac{|b(\mathbf{v}, \rho)|}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \frac{|(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \rho)|}{C_0 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_1} \geq \beta \|\rho\|.$$

为证明 (6.3.11), 由 (5.5.2),

$$\begin{aligned}
 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_w \times \mathbf{v}\|_T^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla_w \times (Q_h \tilde{\mathbf{v}})\|_T^2 \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{Q}_h(\nabla \times \tilde{\mathbf{v}})\|_T^2 \\
 &\leq \|\nabla \times \tilde{\mathbf{v}}\|^2.
 \end{aligned} \tag{6.3.12}$$

由迹不等式 (1.4.10),

$$\begin{aligned}
 &\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_0 \tilde{\mathbf{v}} - Q_b \tilde{\mathbf{v}}\|_{\partial T}^2 \\
 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_0 \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{\partial T}^2 \\
 &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^{-2} \|Q_0 \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}\|_T^2 + \|\nabla(Q_0 \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}})\|_T^2) \\
 &\leq C \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|^2.
 \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

由 (6.3.12), (6.3.13),

$$\|\mathbf{v}\| \leq C \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}\|. \quad (6.3.14)$$

由 (5.5.1),

$$\|\nabla_w \cdot \mathbf{v}\|_T = \|\mathcal{Q}_h(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})\|_T \leq \|\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}\|. \quad (6.3.15)$$

由 (6.3.14) 和 (6.3.15) 知, (6.3.11) 得证. 引理得证. \square

记 \mathcal{M}_h 为离散弱散度算子的核, 即

$$\mathcal{M}_h = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h : b(\mathbf{v}, \rho) = 0, \quad \forall \rho \in \mathcal{W}_h\}.$$

引理 6.3.3. (强制性) 存在常数 $C > 0$, 使得

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C \|\mathbf{v}\|_1^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{M}_h. \quad (6.3.16)$$

证明 对任意的 $\mathbf{v} \in \mathcal{M}_h$,

$$(\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \rho) = 0, \quad \forall \rho \in \mathcal{W}_h.$$

易证 $\nabla_w \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{W}_h$. 取 $\rho = \nabla_w \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{W}_h$, 则 $\nabla_w \cdot \mathbf{v} = 0$. 因此,

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 \geq \|\mathbf{v}\|_1^2,$$

取 $C = 1$, (6.3.16) 得证. \square

引理 6.3.3 和 6.3.2 表明鞍点问题 (6.2.3)-(6.2.4) 满足 Brezzi 定理 1.3.6 [10] 的强制性和 *inf-sup* 条件. 由双线性型 $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ 的定义易证, $a(\cdot, \cdot)$ 和 $b(\cdot, \cdot)$ 有界. 由 Brezzi 定理 1.3.6, 以下结论成立.

定理 6.3.1. WG 算法 (6.2.3)-(6.2.4) 在弱有限元空间 $\mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ 中存在唯一解. 且存在常数 C , 使得

$$\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\| \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{V}'_h},$$

其中,

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{V}'_h} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h, \mathbf{v} \neq 0} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_0)}{\|\mathbf{v}\|_1}.$$

6.4 误差方程

假设 $(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ 和 $(\mathbf{u}; p)$ 分别为 WG 算法 (6.2.3)-(6.2.4) 和静态麦克斯韦方程组 (6.1.28)-(6.1.29) 的解. 定义误差函数

$$\mathbf{e}_h = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b\} = \{Q_0 \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, Q_b \mathbf{u} - \mathbf{u}_b\}, \quad (6.4.1)$$

$$\epsilon_h = Q_h p - p_h. \quad (6.4.2)$$

引理 6.4.1. 假设 $(\mathbf{w}; \rho) \in H(\text{curl}; \Omega) \times L^2_0(\Omega)$ 充分光滑, 且满足

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}) - \nabla \rho = \eta, \quad \text{在 } \Omega, \quad (6.4.3)$$

$$(\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega. \quad (6.4.4)$$

记 $(Q_h \mathbf{w}; Q_h \rho)$ 为 $(\mathbf{w}; \rho)$ 到弱有限元空间 $\mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ 上的 L^2 投影. 对所有的 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$,

$$(\nabla_w \times (Q_h \mathbf{w}), \nabla_w \times \mathbf{v})_h + (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, Q_h \rho)_h = (\eta, \mathbf{v}_0) + l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) + \theta_{\rho}(\mathbf{v}), \quad (6.4.5)$$

其中,

$$l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle (\nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w})), (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n} \rangle_{\partial T}, \quad (6.4.6)$$

$$\theta_{\rho}(\mathbf{v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \rho - Q_h \rho, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T}. \quad (6.4.7)$$

证明 在 (6.2.2) 中取 $\varphi = \nabla_w \times (Q_h \mathbf{w})$,

$$\begin{aligned} & (\nabla_w \times \mathbf{v}, \nabla_w \times (Q_h \mathbf{w}))_T \\ &= (\nabla \times \mathbf{v}_0, \nabla_w \times (Q_h \mathbf{w}))_T - \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{n}, \nabla_w \times (Q_h \mathbf{w}) \rangle_{\partial T}. \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

由 (5.5.2), 上式即为

$$\begin{aligned} & (\nabla_w \times (Q_h \mathbf{w}), \nabla_w \times \mathbf{v})_T \\ &= (\nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{v}_0)_T + \langle \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}), (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n} \rangle_{\partial T}. \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

在 (6.2.1) 中取 $\varphi = Q_h \rho$, 由分部积分,

$$\begin{aligned} & (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, Q_h \rho)_T \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}_0, Q_h \rho)_T + \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}, Q_h \rho \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}_0, \rho)_T + \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}, Q_h \rho \rangle_{\partial T} \\ &= -(\mathbf{v}_0, \nabla \rho)_T + \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}, \rho \rangle_{\partial T} + \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}, Q_h \rho \rangle_{\partial T} \\ &= -(\mathbf{v}_0, \nabla \rho)_T + \langle (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{n}, Q_h \rho - \rho \rangle_{\partial T} + \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, \rho \rangle_{\partial T}. \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

对所有 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和, 由条件 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$ 知 $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}, \rho \rangle_{\partial T} = 0$, 故

$$\begin{aligned} (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, Q_h \rho)_h &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, Q_h \rho)_T \\ &= -(\mathbf{v}_0, \nabla \rho) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}, \rho - Q_h \rho \rangle_{\partial T}, \end{aligned}$$

从而,

$$(\mathbf{v}_0, \nabla \rho) = -(\nabla_w \cdot \mathbf{v}, Q_h \rho)_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n}, \rho - Q_h \rho \rangle_{\partial T}. \quad (6.4.11)$$

(6.4.3) 两边分别作用 \mathbf{v}_0 , 其中 $\mathbf{v} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_b\} \in \mathcal{V}_h$,

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}), \mathbf{v}_0)_T - (\nabla \rho, \mathbf{v}_0)_T = (\eta, \mathbf{v}_0)_T. \quad (6.4.12)$$

由分部积分,

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}), \mathbf{v}_0)_T &= (\nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{v}_0)_T - \langle (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_0 \rangle_{\partial T} \\ &= (\nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{v}_0)_T - \langle (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T} \\ &\quad - \langle (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T}. \end{aligned}$$

对所有单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和, 由边界条件 (6.4.4) 以及 $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T} = 0$,

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}), \mathbf{v}_0) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \times \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{v}_0)_T - \langle (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T}. \quad (6.4.13)$$

由 (6.4.9), (6.4.13),

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}), \mathbf{v}_0) &= (\nabla_w \times (Q_h \mathbf{w}), \nabla_w \times \mathbf{v})_h \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n}, (\nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w})) \rangle_{\partial T}. \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

结合 (6.4.11), (6.4.12), (6.4.14), 引理得证. \square

定理 6.4.1. (6.4.1)-(6.4.2) 定义的误差函数 \mathbf{e}_h 和 ϵ_h 满足方程组

$$a(\mathbf{e}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \epsilon_h) = \varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_h, \quad (6.4.15)$$

$$b(\mathbf{e}_h, q) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{W}_h, \quad (6.4.16)$$

其中,

$$\varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v}) = l_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \theta_p(\mathbf{v}) + s(Q_h \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (6.4.17)$$

证明 取 $\eta = \mathbf{f}$, (6.1.28)-(6.1.29) 的准确解 $(\mathbf{u}; p)$ 满足 (6.4.3)-(6.4.4). 由引理

6.4.1,

$$(\nabla_w \times (Q_h \mathbf{u}), \nabla_w \times \mathbf{v})_h + (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, Q_h p)_h = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0) + l_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \theta_p(\mathbf{v}),$$

上式即为

$$a(Q_h \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, Q_h p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_0) + l_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) + \theta_p(\mathbf{v}) + s(Q_h \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (6.4.18)$$

(6.4.18) 减去 (6.2.3), (6.4.15) 得证.

在 (6.1.29) 中取 $q \in W_h$,

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_h = 0, \quad \forall q \in \mathcal{W}_h.$$

由 (5.5.1),

$$0 = (\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_h = (Q_h(\nabla \cdot \mathbf{u}), q)_h = (\nabla_w \cdot (Q_h \mathbf{u}), q)_h. \quad (6.4.19)$$

(6.4.19) 减去 (6.2.4), (6.4.16) 得证. 定理得证. \square

6.5 技术引理

本节给出推导 WG 算法 (6.2.3)-(6.2.4) 的误差估计时用到的一些结论.

对 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$, 定义

$$|\mathbf{v}|_{1,h} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

易知 $|\mathbf{v}|_{1,h}$ 定义了弱有限元空间 \mathcal{V}_h 中的一个半范数.

引理6.5.1. 假设区域 Ω 的有限元剖分 \mathcal{T}_h 满足定义 1.4.1 的形状正则性假设且 $1 \leq r \leq k$. 假设 $\mathbf{w} \in [H^{r+1}(\Omega)]^3$, $\rho \in H^r(\Omega)$. 对任意的 $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h$, 存在常数 C , 使

得

$$|s(Q_h \mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq Ch^r \|\mathbf{w}\|_{r+1} |\mathbf{v}|_{1,h}, \quad (6.5.1)$$

$$|l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})| \leq Ch^r \|\mathbf{w}\|_{r+1} |\mathbf{v}|_{1,h}, \quad (6.5.2)$$

$$|\theta_{\rho}(\mathbf{v})| \leq Ch^r \|\rho\|_r |\mathbf{v}|_{1,h}. \quad (6.5.3)$$

这里, $l_{\mathbf{w}}(\cdot)$, $\theta_{\rho}(\cdot)$ 的定义见 (6.4.6), (6.4.7).

证明 为证明 (6.5.1), 由 $s(\cdot, \cdot)$ 的定义, Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), (5.6.1),

$$\begin{aligned} & |s(Q_h \mathbf{w}, \mathbf{v})| \\ = & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_0 \mathbf{w} - Q_b \mathbf{w}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T} \right| \\ = & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle Q_0 \mathbf{w} - \mathbf{w}, \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b \rangle_{\partial T} \right| \\ \leq & C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_0 \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq & C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-2} \|Q_0 \mathbf{w} - \mathbf{w}\|_T^2 + |Q_0 \mathbf{w} - \mathbf{w}|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{v}|_{1,h} \\ \leq & Ch^r \|\mathbf{w}\|_{r+1} |\mathbf{v}|_{1,h}. \end{aligned}$$

为证 (6.5.2), 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), (5.6.2),

$$\begin{aligned}
 |l_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w}), (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \times \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w})\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w})\|_T^2 + h_T^2 |\nabla \times \mathbf{w} - \mathbf{Q}_h(\nabla \times \mathbf{w})|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch^r \|\mathbf{w}\|_{r+1} |\mathbf{v}|_{1,h}.
 \end{aligned}$$

为证 (6.5.3), 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), (5.6.3),

$$\begin{aligned}
 |\theta_{\rho}(\mathbf{v})| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \rho - \mathcal{Q}_h \rho, (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial T} \right| \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\rho - \mathcal{Q}_h \rho\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\rho - \mathcal{Q}_h \rho\|_T^2 + h_T^2 |\rho - \mathcal{Q}_h \rho|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Ch^r \|\rho\|_r |\mathbf{v}|_{1,h}.
 \end{aligned}$$

引理得证. \square

6.6 误差估计

本节将建立 WG 算法 4 的解 $(\mathbf{u}_h; p_h)$, 以及 $\mathbf{u}_h = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}$ 的分量 \mathbf{u}_0 和 \mathbf{u}_b 在各种适当定义的离散范数下的最优阶误差估计.

定理 6.6.1. 令 $k \geq 1$. 假设 $(\mathbf{u}; p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^3 \times H^k(\Omega)$ 和 $(\mathbf{u}_h; p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ 分别为静态麦克斯韦方程组 (6.1.28)-(6.1.29) 和 WG 算法 (6.2.3)-(6.2.4) 的解. 存在常数 C , 使得

$$\|Q_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|Q_h p - p_h\| \leq Ch^k (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (6.6.1)$$

证明 由定理 6.4.1, 误差函数 $(\mathbf{e}_h; \epsilon_h) = (Q_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, Q_h p - p_h)$ 满足鞍点问题 (6.4.15)-(6.4.16). 由 Brezzi 定理 1.3.6 [10],

$$\|Q_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|Q_h p - p_h\| \leq C \|\varphi_{\mathbf{u}, p}\|_{\mathcal{V}'_h}. \quad (6.6.2)$$

下面我们估计 $\|\varphi_{\mathbf{u}, p}\|_{\mathcal{V}'_h}$. 由引理 6.5.1, (6.4.17),

$$|\varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v})| \leq Ch^k (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k) |\mathbf{v}|_{1, h},$$

由 $|\mathbf{v}|_{1, h} \leq \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|_1$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\mathbf{u}, p}\|_{\mathcal{V}'_h} &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h, \mathbf{v} \neq 0} \frac{|\varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_1} \\ &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_h, \mathbf{v} \neq 0} \frac{|\varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|_{1, h}} \\ &\leq Ch^k (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k). \end{aligned} \quad (6.6.3)$$

将 (6.6.3) 代入 (6.6.2), (6.6.1) 得证. 定理得证. \square

本节余下部分建立 WG 算法 (6.2.3)-(6.2.4) 的解 $u_h = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}$ 的分量 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b$ 在 L^2 范数下的最优阶误差估计. 为此, 考虑对偶问题: 求 $(\psi; \xi) \in [H(\text{curl}; \Omega) \cap H(\text{div}; \Omega)] \times L^2_0(\Omega)$, 使得

$$\nabla \times (\nabla \times \psi) - \nabla \xi = \mathbf{e}_0, \quad \text{在 } \Omega, \quad (6.6.4)$$

$$\nabla \cdot \psi = 0, \quad \text{在 } \Omega, \quad (6.6.5)$$

$$(\nabla \times \psi) \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega, \quad (6.6.6)$$

$$\psi \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega. \quad (6.6.7)$$

假设对偶问题 (6.6.4)-(6.6.7) 具有 $[H^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)$ 正则性, 即解 $(\psi; \xi) \in [H^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)$ 且满足先验估计

$$\|\psi\|_2 + \|\xi\|_1 \leq C\|\mathbf{e}_0\|. \quad (6.6.8)$$

定理 6.6.2. 令 $k \geq 1$. 假设 $(\mathbf{u}; p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^3 \times H^k(\Omega)$ 和 $(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ 分别为静态麦克斯韦方程组 (6.1.28)-(6.1.29) 和 WG 算法 (6.2.3)-(6.2.4) 的解. 存在常数 C , 使得

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq Ch^{k+1}(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (6.6.9)$$

证明 (6.6.4) 两边分别作用 \mathbf{e}_0 ,

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0).$$

注意到 $(\psi; \xi)$ 满足引理 6.4.1 的条件. 在 (6.4.5) 中取 $\eta = \mathbf{e}_0$, $(\mathbf{w}; \rho) = (\psi; \xi)$,

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 = (\nabla_w \times (Q_h\psi), \nabla_w \times \mathbf{e}_h)_h + (\nabla_w \cdot \mathbf{e}_h, Q_h\xi)_h - \theta_\xi(\mathbf{e}_h) - l_\psi(\mathbf{e}_h),$$

上式即为

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 = a(Q_h\psi, \mathbf{e}_h) + b(\mathbf{e}_h, Q_h\xi) - \varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h), \quad (6.6.10)$$

其中,

$$\varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h) = \theta_\xi(\mathbf{e}_h) + l_\psi(\mathbf{e}_h) + s(Q_h\psi, \mathbf{e}_h).$$

由 (6.4.16) 知 $b(\mathbf{e}_h, Q_h\xi) = 0$. 因此,

$$\|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 = a(Q_h\psi, \mathbf{e}_h) - \varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h). \quad (6.6.11)$$

由 (5.5.1), (6.6.5),

$$\begin{aligned}
 b(Q_h\psi, \epsilon_h) &= (\nabla_w \cdot Q_h\psi, \epsilon_h)_h \\
 &= (Q_h\nabla \cdot \psi, \epsilon_h)_h \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

因此, 由 (6.6.11), (6.4.15),

$$\begin{aligned}
 \|Q_0\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 &= a(\mathbf{e}_h, Q_h\psi) + b(Q_h\psi, \epsilon_h) - \varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h) \\
 &= \varphi_{\mathbf{u}, p}(Q_h\psi) - \varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h).
 \end{aligned} \tag{6.6.12}$$

在引理 6.5.1 中取 $r = 1$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_h$, $(\mathbf{w}; \rho) = (\psi; \xi)$, 由 (6.6.8),

$$\begin{aligned}
 |\varphi_{\psi, \xi}(\mathbf{e}_h)| &\leq Ch(\|\psi\|_2 + \|\xi\|_1) |\mathbf{e}_h|_{1,h} \\
 &\leq Ch\|\mathbf{e}_0\| \|\mathbf{e}_h\|.
 \end{aligned} \tag{6.6.13}$$

同理, 在引理 6.5.1 中取 $r = k$, $\mathbf{v} = Q_h\psi$, $(\mathbf{w}; \rho) = (\mathbf{u}; p)$,

$$|\varphi_{\mathbf{u}, p}(Q_h\psi)| \leq Ch^k(\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) |Q_h\psi|_{1,h}. \tag{6.6.14}$$

由迹不等式 (1.4.10),

$$\begin{aligned}
 h_T^{-1}\|Q_0\psi - Q_b\psi\|_{\partial T}^2 &\leq h_T^{-1}\|Q_0\psi - \psi\|_{\partial T}^2 \\
 &\leq Ch_T^{-2}\|\psi - Q_0\psi\|_T^2 + C\|\nabla(\psi - Q_0\psi)\|_T^2 \\
 &\leq Ch_T^2\|\nabla^2\psi\|_T^2.
 \end{aligned}$$

对所有单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 求和,

$$\begin{aligned} |Q_h \psi|_{1,h}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|Q_0 \psi - Q_b \psi\|_{\partial T}^2 \\ &\leq Ch^2 \|\psi\|_2^2. \end{aligned}$$

将上述估计代入 (6.6.14), 再由 (6.6.8),

$$|\varphi_{\mathbf{u},p}(Q_h \psi)| \leq Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{e}_0\|. \quad (6.6.15)$$

由 (6.6.12), (6.6.13), (6.6.15),

$$\begin{aligned} \|Q_0 \mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|^2 &\leq |\varphi_{\mathbf{u},p}(Q_h \psi)| + |\varphi_{\psi,\xi}(\mathbf{e}_h)| \\ &\leq C(h \|\mathbf{e}_h\| + h^{k+1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k)) \|Q_0 \mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|, \end{aligned}$$

从而

$$\|Q_0 \mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq Ch \|\mathbf{e}_h\| + Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k).$$

再由定理 6.6.1 以及 $\|\mathbf{e}_h\| \leq \|\mathbf{e}_h\|_1$ 知, 定理得证. \square

定理 6.6.3. 令 $k \geq 1$. 假设 $(\mathbf{u}; p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^3 \times H^k(\Omega)$ 和 $(\mathbf{u}_h; p_h) = (\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_b\}; p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h$ 分别为静态麦克斯韦方程组 (6.1.28)-(6.1.29) 和 WG 算法 (6.2.3)-(6.2.4) 的解. 定义

$$\|\mathbf{u}_b\| = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \int_{\partial T} \mathbf{u}_b^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

存在常数 C , 使得

$$\|Q_b \mathbf{u} - \mathbf{u}_b\| \leq Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (6.6.16)$$

证明 在误差方程 (6.4.15) 中取 $\mathbf{v} = \{0, \mathbf{e}_b\}$,

$$(\nabla_w \times \mathbf{e}_h, \nabla_w \times \mathbf{v})_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{e}_b - \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b \rangle_{\partial T} + (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \epsilon_h)_h = \varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v}).$$

上式即为

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b \rangle_{\partial T} - (\nabla_w \times \mathbf{e}_h, \nabla_w \times \mathbf{v})_h - (\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \epsilon_h)_h + \varphi_{\mathbf{u}, p}(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (6.6.17)$$

以下分别估计 (6.6.17) 右端四项. 对于 (6.6.17) 右端第一项, 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.10), 以及逆不等式 (1.4.23),

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_b \rangle_{\partial T} \right| \\ & \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-3} \|\mathbf{e}_0\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-4} \|\mathbf{e}_0\|_T^2 + h_T^{-2} \|\nabla \mathbf{e}_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_b\| \\ & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-4} \|\mathbf{e}_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_b\|. \end{aligned} \quad (6.6.18)$$

对于 (6.6.17) 右端第二项, 由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|(\nabla_w \times \mathbf{e}_h, \nabla_w \times \mathbf{v})_h| \leq \|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| \|\nabla_w \times \mathbf{v}\|. \quad (6.6.19)$$

由 (5.3.8), Cauchy-Schwarz 不等式, 迹不等式 (1.4.24), 对任意的 $\varphi \in P_{k-1}(T)^3$,

$$\begin{aligned} |(\nabla_w \times \mathbf{v}, \varphi)_T| &= |(\mathbf{e}_b \times \mathbf{n}, \varphi)_{\partial T}| \\ &\leq \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T} \|\varphi\|_{\partial T} \\ &\leq Ch_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_T \|\varphi\|_T. \end{aligned}$$

因此,

$$\|\nabla_w \times \mathbf{v}\|_T = \sup_{0 \neq \varphi \in [P_{k-1}(T)]^3} \frac{|(\nabla_w \times \mathbf{v}, \varphi)_T|}{\|\varphi\|_T} \leq Ch_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_T.$$

将上式代入 (6.6.19),

$$|(\nabla_w \times \mathbf{e}_h, \nabla_w \times \mathbf{v})_h| \leq Ch^{-1} \|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| \|\mathbf{e}_b\|. \quad (6.6.20)$$

对于 (6.6.17) 右端第三项, 同理可得,

$$|(\nabla_w \cdot \mathbf{v}, \epsilon_h)_h| \leq Ch^{-1} \|\epsilon_h\| \|\mathbf{e}_b\|. \quad (6.6.21)$$

由引理 6.5.1,

$$\begin{aligned} |\varphi_{\mathbf{u},p}(\mathbf{v})| &\leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) |\mathbf{v}|_{1,h} \\ &\leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \left(\sum_T h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Ch^k (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) h^{-1} \|\mathbf{e}_b\| \\ &\leq Ch^{k-1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{e}_b\|. \end{aligned} \quad (6.6.22)$$

结合 (6.6.17), (6.6.18), (6.6.20), (6.6.21), (6.6.22),

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2 \\
 & \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-4} \|\mathbf{e}_0\|_T^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{e}_b\| + Ch^{-1} (\|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| + \|\epsilon_h\|) \|\mathbf{e}_b\| \\
 & \quad + Ch^{k-1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{e}_b\|.
 \end{aligned} \tag{6.6.23}$$

由有限元剖分 \mathcal{T}_h 的形状正则性假设, 易证

$$\|\mathbf{e}_b\|^2 \leq Ch^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \|\mathbf{e}_b\|_{\partial T}^2.$$

再由 (6.6.23),

$$\|\mathbf{e}_b\|^2 \leq C (\|\mathbf{e}_0\| + h \|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| + h \|\epsilon_h\|) \|\mathbf{e}_b\| + Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k) \|\mathbf{e}_b\|.$$

因此,

$$\|\mathbf{e}_b\| \leq C (\|\mathbf{e}_0\| + h \|\nabla_w \times \mathbf{e}_h\| + h \|\epsilon_h\|) + Ch^{k+1} (\|\mathbf{u}\|_{k+1} + \|p\|_k).$$

再由 (6.6.9) 和 (6.6.1), (6.6.16) 得证. 定理得证. \square

第7章 结论与展望

本文主要讨论了求解偏微分方程,特别是重调和方程、麦克斯韦方程组和 div-curl 问题的 WG 有限元方法以及杂交 WG 有限元方法,证明了在离散范数意义下的最优阶误差估计,给出了相关的数值结果,数值实验结果充分验证了我们对 WG 方法所建立的数学理论,并表明了 WG 有限元法的高效性和精确性.关于 WG 有限元方法,鉴于时间的关系,还有待进一步深入研究和推广.我们今后拟解决的问题,具体有如下几个方面:

1. 为有效求解,将应用区域分解方法和多重网格法来求解相应的离散代数方程组,同时构造求解重调和方程的 WG 有限元方法的预处理子.
2. 给出求解麦克斯韦方程组和 div-curl 问题的 WG 有限元方法的数值结果.
3. 设计求解麦克斯韦方程组的 WG 有限元方法的快速算法.特别地,我们将考虑求解麦克斯韦方程组的 WG 有限元方法的杂交形式.通过子空间分解技巧,构造求解麦克斯韦方程组和 div-curl 问题的 WG 有限元方法有效的预条件子或高效迭代求解算法.
4. 考虑更具挑战性的 Reissner-Mindlin 板问题的 WG 有限元方法.这里的关键是构造无闭锁的高效 WG 有限元方法.
5. 更进一步,我们将设计 Vlasov-Maxwell 问题的 WG 有限元方法,并考虑实际问题的数值模拟.

参考文献

- [1] D. Arnold and F. Brezzi, Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates, *RAIRO Modl. Math. Anal. Numr.*, 19(1)(1985), 7-32.
- [2] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L. D. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(2002), 1749-1779.
- [3] I. Babuska, The finite element method with Lagrange multipliers, *Numer. Math.*, 20(1973), 179-192.
- [4] A. Bayliss, M. Gunzburger and E. Turkel, Boundary conditions for the numerical solutions of elliptic in exterior regions, *SIAM J. Appl. Math.*, 42(1982), 430-451.
- [5] A. Bossavit, *Computational electromagnetism*. Academic Press, San Diego, 1998.
- [6] S. Brenner, J. Cui, Z. Nan and L. Sung, Hodge decomposition for divergence-free vector fields and two-dimensional Maxwell's equations, *Math. Comp.*, 81(2012), 643-659.
- [7] S. Brenner, F. Li and L. Sung, A locally divergence-free interior penalty method for two dimensional curl-curl problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2008), 1190-1211.
- [8] S. Brenner and L.Scott, 有限元方法的数学理论(第3版). 世界图书出版公司, 2011.
- [9] S. Brenner and L. Sung, C^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains, *J. Sci. Comput.*, (2005), 83-118.

-
- [10] F. Brezzi, On the existence, uniqueness, and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers, *RAIRO*, 8(1974), 129-151.
- [11] F. Brezzi, J. Douglas, Jr. and L.D. Marini, Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems, *Numer. Math.*, 47(1985), 217-235.
- [12] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, New York, 1978.
- [13] 陈传淼, *科学计算概论*. 北京: 科学出版社, 2007.
- [14] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan and R. Lazarov, Unified hybridization of discontinuous Galerkin, mixed and continuous Galerkin methods for second-order elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(2009), 1319-1365.
- [15] 杜其奎, 陈金如, *有限元方法的数学理论*. 北京: 科学出版社, 2012.
- [16] H. Duan, F. Jia, P. Ling and R. Tan, The Local L^2 projected C^0 finite element method for maxwell problem, *SIMA J. Numer. Anal.*, 47(2009), 1274-1303.
- [17] H. Duan, P. Ling and R. Tan, C^0 elements for generalized indefinite maxwell equations, *Numer. Math.*, 122(2012), 61-69.
- [18] G. Engel, K. Garikipati, T. Hughes, M.G. Larson, L. Mazzei, and R. Taylor, Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191(2002), 3669-3750.
- [19] R. Falk, Approximation of the biharmonic equation by a mixed finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(1978), 556-567.
- [20] B. X. Fraeijns De Veubeke, Displacement and equilibrium models in the finite element method, In "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. Holister (eds.), John Wiley, New York, 1965.
- [21] B. X. Fraeijns De Veubeke, Stress function approach, *International Congress on the Finite Element Methods in Structural Mechanics*, Bournemouth, 1975.

- [22] T. Gudi, N. Nataraj and A. K. Pani, Mixed discontinuous Galerkin finite element method for the biharmonic equation, *J. Sci. Comput.*, 37(2008), 139-161.
- [23] R. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [24] P. Houston, I. Perugia and D. Schotzau, Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator, Tech. report 02-16, University of Basel, Department of Mathematics, Basel, Switzerland, 2002.
- [25] P. Houston, I. Perugia and D. Schotzau, hp-DGFEM for Maxwell's equations, in *Numerical Mathematics and Advanced Applications: ENUMATH 2001*, F. Brezzi, A. Bua, S. Corsaro and A. Murli, eds., Springer-Verlag, Berlin, 2003, 785-794.
- [26] P. Houston, I. Perugia and D. Schotzau, Mixed discontinuous Galerkin approximation of the Maxwell operator, *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(2004), 434-459.
- [27] 金建铭, *电磁场有限元方法*. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998.
- [28] J. Jin, *The finite element method in electromagnetics (Second Edition)*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2002.
- [29] 李立康, 郭毓駒, *索伯列夫空间引论*. 上海: 上海科学技术出版社, 1981.
- [30] P. Monk, A mixed finite element method for the biharmonic equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(1987), 737-749.
- [31] P. Monk, *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press, New York, 2003.
- [32] L.S.D. Morley, The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems, *Aero. Quart.*, 19(1968), 149-169.

-
- [33] I. Mozolevski, E. Sli and P.R. Bsing, hp-Version a priori error analysis of interior penalty discontinuous Galerkin finite element approximations to the biharmonic equation, *J. Sci. Comput.*, 30(2007), 465-491.
- [34] L. Mu, J. Wang and X. Ye, Weak Galerkin finite element methods for the biharmonic equation on polytopal meshes. arXiv: 1303.0927v1.
- [35] L. Mu, J. Wang and X. Ye, Weak Galerkin finite element methods on polytopal meshes. arXiv: 1204.3655v2.
- [36] L. Mu, J. Wang, X. Ye and S. Zhang, A weak Galerkin finite element method for the Maxwell equations, arXiv: 1312.2309v1.
- [37] L. Mu, Y. Wang, J. Wang and X. Ye, A weak Galerkin mixed finite element method for biharmonic equations. arXiv: 1210.3818v2.
- [38] J. Nédélec, Mixed finite elements in R^3 , *Numer. Math.*, 35(1980), 315-341.
- [39] J. Nédélec, A new family of mixed finite elements in R^3 , *Numer. Math.*, 50 (1986), 57-81.
- [40] I. Perugia and D. Schotzau, The hp-local discontinuous Galerkin method for low-frequency time-harmonic Maxwell equations, *Math. Comp.*, 72(2003), 1179-1214.
- [41] I. Perugia, D. Schotzau and P. Monk, Stabilized interior penalty methods for the time-harmonic Maxwell equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191(2002), 4675-4697.
- [42] A. Peterson, Absorbing boundary conditions for the vector wave equation, *Microwave Opt. Tech. Lett.*, 1(1988), 62-64.
- [43] P. Raviart and J. Thomas, A mixed finite element method for second order elliptic problems, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, I. Galigani, E. Magenes, eds., *Lectures Notes in Math.*, 606, Springer-Verlag, New York, 1977.

- [44] T. Senior, Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surface, *Appl. Sci. Res. B*, 8(1960), 418-436.
- [45] 石钟慈, 王鸣, 有限元方法. 北京: 科学出版社, 2010.
- [46] J. Stratton, *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [47] C. Wang and J. Wang, An efficient numerical scheme for the biharmonic equation by weak Galerkin finite element methods on polygonal or polyhedral meshes. arXiv:1303.0927.
- [48] C. Wang and J. Wang, A hybridized weak Galerkin finite element method for the biharmonic equation. arXiv:1402.1157v1.
- [49] J. Wang, *Mixed finite element methods, Numerical methods in scientific and engineering computing*, Eds: W. Cai, Z. Shi, C. Shu and J. Xu, Academic Press.
- [50] J. Wang and X. Ye, A weak Galerkin finite element method for second-order elliptic problems, *J. Comp. and Appl. Math*, 241(2013), 103-115.
- [51] J. Wang and X. Ye, Weak Galerkin finite element methods on polytopal meshes. arXiv:1204.3655v2.
- [52] J. Wang and X. Ye, A weak Galerkin mixed finite element method for second-order elliptic problems, *Math. Comp.*, to appear. arXiv:1202.3655v2.
- [53] J. Wang and X. Ye, A weak Galerkin finite element method for the Stokes equations. arXiv:1302.2707v1.
- [54] 王烈衡, 许学军, 有限元方法的数学基础. 北京: 科学出版社, 2007.
- [55] 王术, *Sobolev 空间与偏微分方程引论*. 北京: 科学出版社, 2008.
- [56] J. Webb and V. Kanellopoulos, Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation, *Microwave Opt. Tech. Lett.*, 2(1989), 370-372.

- [57] H. Whitney, Geometric integration theory, Princeton University Press, Princeton.
- [58] <http://ishare.iask.sina.com.cn/f/23433946.html>.
- [59] http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic205126.files/4_Bending_of_plates.pdf.

攻读博士学位期间所发表及已完成的论文

- [1] Chunmei Wang, A preconditioner for FETI-DP method of Stokes problem with mortar-type discretization, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, doi:10.1155/2013/485628.
- [2] Chunmei Wang, A preconditioner for FETI-DP method of a 4th order elliptic problem with mortar morley element discretization, *Wulfenia Journal*, 20(2013), 210-229.
- [3] Chunmei Wang, A preconditioner for FETI-DP method for mortar-type bicubic element discretization of a plate problem, *Journal of Computational Intelligence and Electronic Systems*, 2(2013), 1-9.
- [4] Chunmei Wang, Shangyou Zhang, Jinru Chen, A mass-preserving interpolation operator and an interpolated mortar condition for nonconforming elements on non-matching grids, *Journal of Scientific Computing*, Published online: 16 April 2014. DOI 10.1007/s10915-014-9852-y
- [5] Chunmei Wang, Shijian Yan, A two-level additive schwarz preconditioner with WOPSIP methods for non-self-adjoint and indefinite problems, *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 31(2014), 296-301.
- [6] Chunmei Wang, Junping Wang, An efficient numerical scheme for the biharmonic equation by weak Galerkin finite element methods on polygonal or polyhedral meshes, *Journal of Computers and Mathematics with Applications*, accepted. arXiv:1303.0927.
- [7] Chunmei Wang, A preconditioner for the FETI-DP method for mortar-type Crouzeix-Raviart element discretization, *Applications of Mathematics*, accepted.
- [8] Chunmei Wang, Junping Wang, A hybridized weak Galerkin finite element method for the biharmonic equation, submitted to *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. arXiv:1402.1157v1.
- [9] Chunmei Wang, Junping Wang, An efficient weak Galerkin finite element method for the Maxwell's equations, in preparation.

- [10] Chunmei Wang, Junping Wang, An efficient weak Galerkin finite element method for div-curl problems, in preparation.
- [11] Chunmei Wang, Junping Wang, A sufficient condition for superconvergence for finite element solutions of second order elliptic problems, in preparation.
- [12] Chunmei Wang, Junping Wang, A collocation method for second order elliptic problem, in preparation.
- [13] Chunmei Wang, Junping Wang, A new weak Galerkin finite element method for second order elliptic problems in non-divergent form, in preparation
- [14] Chunmei Wang, A mortar-type weak Galerkin finite element method for non-self-adjoint and indefinite problems, in preparation.
- [15] Chunmei Wang, A stabilized mortar-type P_1^{NC} - P_0 mixed element method for coupling Stokes and Darcy flows, in preparation.
- [16] Chunmei Wang, A preconditioner for the FETI-DP method with rotated Q1 nonconforming finite element discretizations, in preparation.

科研项目:

主持江苏省普通高校研究生科研创新计划项目, 项目编号:
CXZZ13_0387.

致 谢

研究生生活一晃而过,回首走过的时光,想起那些在我知识道路上给予我极大帮助的人,感慨万千,心中满是感恩之情。

首先向我的指导老师陈金如教授和王军平教授表示衷心的感谢,本论文是在陈老师和王老师的悉心指导和严格要求下完成的,从论文的选题,修改,到论文的定稿及发表,自始至终都倾注着陈老师和王老师的心血。尽管他们每天工作繁忙,但他们总是给予我充分的学术指导,可以说没有他们,就没有我博士论文的顺利完成。更重要的是,陈老师和王老师严谨的治学态度、宽厚仁慈的胸怀为我树立了一辈子学习的典范,他们的教诲与鞭策将激励我在科学和教育的道路上励精图治,开拓创新。

其次,感谢学校和学院对我的帮助和栽培。感谢数科院为我营造了浓厚的学术氛围,以及提供了舒适的学习和生活环境。感谢李治林教授、王雨顺教授、杜其奎教授、张志跃教授、王丽教授对我在学习上的帮助和教育。感谢朱安友老师、姚奕老师、高贵芳老师、徐倩老师在学习生活上给予的关心和帮助。感谢学院复印室、实验室的老师,他们为我的学习和生活提供了极大的方便。感谢王峰老师、师兄黄佩奇、曾玉平、师姐姜亚琴和师弟师妹纪海峰、王秋亮、钱凌志、王梅、沈琼、乔培娟、叶鹏、秦芳芳、查敏,感谢他们对我学习上的鼓励和讨论,以及生活上的关心。

感谢我的单位南京师范大学泰州学院的领导为我创造了良好的学习条件,感谢我的同事为我分担了繁重的教学任务,他们的付出使我更加珍惜学习的机会,也更加珍惜教师的岗位。

感谢许学军研究员、李继春教授、张上游教授、叶秀教授、张然教授的深入讨论和坦诚交流,以及他们给我的帮助。

感谢同一机房的同学们:万敏、蔡文君、杨全会、唐兴栋、李海燕、刘木火、朱泉涌、朱琳、张静、王汉峰、周森、周晓霞、林琳、邵祥,他们热情友好,亲切随和,为我营造了和谐融洽的气氛。

最后,感谢我的父母和我的爱人一直以来对我的学习的理解和支持,感谢他们的辛勤付出。感谢我的儿子,让我感受着他的快乐。