Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Mémoire de Master 2ème année

Directeur de stage : Matthieu Fradelizi

Inégalités de grandes déviations dans les corps convexes inconditionnels

Arnaud Marsiglietti

Paris, le 9 août 2012

Préface de la deuxième édition

Cette deuxième édition corrige un bon nombre de coquilles et d'erreurs présentes dans la première édition et améliore également certaines preuves.

Bien qu'il s'agisse à la base d'un travail purement scolaire n'ayant aucune vocation de référence dans le domaine mathématique étudié ici, ce mémoire constitue pour moi en quelque sorte une bible dans laquelle je puisse me retrouver facilement. Il me parait donc essentiel de la mettre à jour, d'autant plus que j'ai eu plusieurs retours de collègues et d'amis qui, en surfant sur internet, sont tombés sur mon mémoire.

Il est à noter que je suis prêt à écouter toute remarque ou suggestion concernant ce mémoire car il est certain qu'il y a encore des coquilles et des erreurs malgré une première correction.

Arnaud MARSIGLIETTI

arnaud.marsiglietti@univ-mlv.fr

Préface de la première édition

Lorsque l'on procède à un travail de recherche sur un sujet quelconque, il est important dans un premier temps de connaître l'ensemble des découvertes sur le sujet en question pour ne pas avoir à chercher des résultats déjà trouvés et donc pour éviter de perdre son temps. Je vais donc faire, à travers ce mémoire, le rappel de nombreuses connaissances, qui ne seront d'ailleurs pas toutes utilisées dans la suite pour l'étude de nos articles, mais qui peuvent s'avérer utiles de garder en tête, surtout qu'elles ont un rapport avec notre sujet. Notre sujet en question s'intitule la géométrie convexe. C'est un vaste sujet qui comprend entre autres les domaines tels que la théorie des polytopes convexes, la théorie locale des espaces de Banach et évidemment la théorie de Brunn-Minkowski. Nous faisons une mise en perspective de cette dernière dans le premier chapitre dont nous nous inspirons forcément du livre de Schneider [SCH]. Nous approfondissons la notion de convexité, qui est la propriété essentielle, et derrière cette notion pourtant élémentaire se cachent de nombreux résultats fructueux. Le terme « géométrie » est là pour nous faire rappeler que les propriétés que nous allons voir par la suite se visualisent très bien à l'aide de dessins et sont assez intuitives, quoi que parfois il faut faire attention. Ensuite, la trame principale du mémoire est forgée à partir des deux articles de Bobkov et Nazarov intitulés « On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis » et « Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis », voir [BOB-NAZ1] et [BOB-NAZ2]. Enfin, nous terminons par des annexes où nous discutons parfois de notions élémentaires mais récurrentes dans notre mémoire.

Beaucoup d'articles circulent sur ce vaste — et pourtant une goutte d'eau dans la mer par rapport à l'ensemble des domaines des mathématiques — sujet de la géométrie convexe, c'est donc un domaine déjà bien fleuri, nous avons de nombreux outils déjà développés. Mais malgré tout cela, il reste encore bien des choses à découvrir. Les mathématiques sont une science infinie.

Arnaud MARSIGLIETTI

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier mon directeur de stage monsieur Matthieu Fradelizi d'avoir accepté de me prendre sous son aile pour m'initier à la recherche scientifique, particulièrement en mathématiques à travers le domaine de la géométrie convexe. C'est avec plaisir que j'ai travaillé avec lui car il a su être très largement disponible et m'a apporté toute l'aide nécessaire que j'ai eu besoin pour composer mon mémoire.

Je remercie également les enseignants-chercheurs ayant fait part de mon jury : Nathaël Gozlan, Olivier Guédon et Paul-Marie Samson.

Table des matières

Chapitre 1

Éléments de la théorie de Brunn-Minkowski

Dans ce chapitre, nous allons mettre en évidence certaines connaissances nécessaires à la compréhension des articles mathématiques concernant la géométrie convexe au sens très général. En particulier nous parlerons des outils de base de la théorie de Brunn-Minkowski. Nous introduisons également ici les notations et les terminologies que nous adopterons dans la suite. Pour ce chapitre, on s'inspirera beaucoup de [SCH] et [DEM]. Pour une belle introduction à la théorie de la géométrie convexe, on peut consulter [BAL] qui introduit d'ailleurs des notions non mentionnées ici.

1.1 Notations et Premières définitions

Dans la théorie de la géométrie convexe, le cadre de travail est généralement un espace euclidien réel de dimension finie, par conséquent la plupart des résultats, si ce n'est tous, concerneront de tels espaces et en fait, sans pertes de généralités, nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, muni de sa structure euclidienne usuelle. Plus précisément, nous noterons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ où $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, le 1 se situant à la j-ème coordonnée. Nous noterons 0 l'origine de $\mathbb{R}^n$ et si $x \in \mathbb{R}^n$, nous dénoterons ses coordonnées de la sorte, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous noterons le produit scalaire de x et de y

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

et la norme euclidienne associée sera notée

$$|x| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous noterons également $|.|$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ définie sur les parties mesurables de $\mathbb{R}^n$ et nous parlerons dans ce cas plus volontiers de volume que de mesure. Lorsque le besoin se fera sentir, nous noterons $|.|_n$ le volume n-dimensionnel sur $\mathbb{R}^n$. Pour tous ensembles A et B de $\mathbb{R}^n$, on définit la somme, dite de Minkowski,

$$A + B = \{a + b\,;\, a \in A, b \in B\}$$

et le produit d'un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A = \{\lambda a\,;\, a \in A\}.$$

On adoptera les notations suivantes,

$$-A = (-1)A, \qquad A - B = A + (-B), \qquad A + x = A + \{x\},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.1.1 (Centre de gravité)**.** *On appelle centroïde ou centre de gravité d'un ensemble mesurable et borné A de $\mathbb{R}^n$ l'élément*

$$\frac{1}{|A|}\int_A x \,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{|A|}\int_A x_1 \,\mathrm{d}x, \ldots, \frac{1}{|A|}\int_A x_n \,\mathrm{d}x\right).$$

Nous noterons $\mathrm{int}(A)$, $\overline{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ et $\mathrm{card}(A)$ respectivement l'intérieur, l'adhérence, la frontière et le cardinal de l'ensemble A. Nous noterons $\mathrm{vect}(A)$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble A. On dira que l'ensemble A est symétrique si $A = -A$. Sauf cas particuliers, nous ne distinguerons pas points et vecteurs.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés de taille n à coefficients réels, $GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments sont inversibles, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $GL_n(\mathbb{R})$ dont les éléments sont orthogonaux, c'est-à-dire que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si $MM^t = Id$ où M^t désigne la matrice transposée de M et Id la matrice identité. De plus, nous noterons $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, $GL(\mathbb{R}^n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dont les éléments sont inversibles, $SL(\mathbb{R}^n)$ le sous-ensemble de $GL(\mathbb{R}^n)$ dont les éléments préservent le volume, $\mathcal{O}(n)$ le sous-ensemble de $SL(\mathbb{R}^n)$ dont les matrices dans toute base orthonormée sont orthogonales.

Lorsque l'on dit qu'une constante est universelle, on sous-entend qu'elle ne dépend de rien, pas même de la dimension de l'espace dans lequel on se situe.

1.2 Ensembles convexes

Définition 1.2.1 (Ensemble convexe)**.** *Un ensemble C est convexe si pour tous $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, l'élément $(1-\lambda)x + \lambda y$ appartient à C. On dit parfois que le segment $[x, y]$ est inclus dans C.*

Définition 1.2.2 (corps convexe)**.** *Un ensemble K est un corps convexe si K est un ensemble compact convexe d'intérieur non vide.*

Définition 1.2.3 (Combinaison convexe)**.** *Un point x de $\mathbb{R}^n$ est une combinaison convexe des points $x_1, \dots, x_k$ de $\mathbb{R}^n$ s'il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ positifs ou nuls vérifiant $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ tels que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.*

Proposition 1.2.4. *Si un ensemble C est convexe alors il est stable par toute combinaison convexe associée à une suite finie arbitraire $\{x_1, \dots, x_k\}$ de points appartenant à C. La réciproque est vraie par définition d'un ensemble convexe.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence. On veut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous $x_1, \dots, x_k \in C$, tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ tels que $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$, on a

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \in C.$$

C'est évident pour $k = 1$ et pour $k = 2$ c'est vrai par définition d'un ensemble convexe.

Soient maintenant $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ positifs ou nuls tels que $\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 1$ et soient $k+1$ éléments de C, $x_1, \dots, x_{k+1}$. Alors,

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1} = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} + \lambda_{k+1} x_{k+1}.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} \in C$$

car $\sum_{j=1}^k \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} = 1$. En rappliquant l'hypothèse de récurrence au rang 2, on obtient le résultat.

□

Proposition 1.2.5. *Une intersection quelconque d'ensembles convexes est convexe.*

Démonstration. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ensembles convexes. Soient $x, y \in \cap_{i \in I} C_i$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, pour tout $i \in I$, l'ensemble C_i est convexe. Donc, pour tout i, $(1-\lambda)x + \lambda y \in C_i$. Ainsi, $(1-\lambda)x + \lambda y \in \cap_{i \in I} C_i$. □

Cette proposition justifie la définition suivante,

Définition 1.2.6 (Enveloppe convexe)**.** *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On appelle enveloppe convexe de A, et on note* $\operatorname{conv}(A)$*, l'intersection de tous les convexes qui contiennent A. C'est donc le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ qui contient A.*

Cette définition implique que l'ensemble A est convexe si et seulement si $A = \mathrm{conv}(A)$.

Proposition 1.2.7. *Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^n$. Alors, l'ensemble* $\mathrm{conv}(A)$ *est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'un nombre fini quelconque d'éléments de A.*

Démonstration. Notons C l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'un nombre fini quelconque d'éléments de A.

Par définition, $A \subset C$. Soient z_1 et z_2 deux éléments de C, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, $z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \in C$. Donc, l'ensemble C est un ensemble convexe et qui contient A. Par conséquent, par définition de l'enveloppe convexe, $\mathrm{conv}(A) \subset C$.

Réciproquement, tout convexe qui contient A contient toutes les combinaisons convexes d'un nombre fini quelconque d'éléments de A, c'est-à-dire qui contient l'ensemble C, d'après la proposition 1.2.4. Par conséquent, $C \subset \mathrm{conv}(A)$.

□

Définition 1.2.8 (Points affinement indépendants)**.** *On dit que les points $x_1, \dots, x_k$ de $\mathbb{R}^n$ sont affinement indépendants si pour tous réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ implique que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.*

Cette définition est équivalente à l'indépendance linéaire des éléments $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$. En effet,

$$\sum_{i=2}^k \lambda_i (x_i - x_1) = 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0 \iff -\left(\sum_{i=2}^k \lambda_i\right) x_1 + \sum_{i=2}^k \lambda_i x_i \Rightarrow \forall i,\ \lambda_i = 0$$
$$\iff \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0 \text{ et} \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0 \Rightarrow \forall i,\ \lambda_i = 0.$$

Théorème 1.2.9 (Carathéodory)**.** *Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit x un élément de* $\mathrm{conv}(A)$*. Alors x est une combinaison convexe de points de A affinement indépendants. En particulier, x est une combinaison convexe d'au plus $n+1$ points de A.*

Démonstration. On reprend les hypothèses de l'énoncé. Soit $x \in \mathrm{conv}(A)$, alors d'après la proposition 1.2.7, $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ avec pour tout i, $x_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ où l'on suppose k minimal. On procède par l'absurde en supposant que $x_1, \dots, x_k$ sont affinement dépendants. Alors il existe des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$. Ainsi, au moins un des α_i est strictement positif. On pose $I = \{i\,;\, \alpha_i > 0\}$ et soit m tel que $\frac{\lambda_m}{\alpha_m} = \min\left\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\,;\, i \in I\right\}$. Alors, pour tout i, $\frac{\lambda_m}{\alpha_m}\alpha_i \leq \lambda_i$. Dans la représentation affine $x = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{\alpha_m}\alpha_i\right) x_i$, tous les coefficients sont positifs, ils sont de somme égale à 1 et au moins l'un d'entre eux est nul (au moins le m-ième coefficient). Ce qui contredit la minimalité de k. Ainsi, $x_1, \dots, x_k$ sont affinement indépendants, ce qui implique que $k \leq n+1$.

$\square$

Proposition 1.2.10. *Si l'ensemble C est convexe, alors les ensembles $\overline{C}$ et* $\text{int}(C)$ *sont convexes.*

Démonstration. Soit C un ensemble convexe.
i) Soient $x, y \in \overline{C}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de C telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-\lambda)x_n + \lambda y_n \in C$. Par passage à la limite, on obtient que $(1-\lambda)x + \lambda y \in \overline{C}$.
ii) Soient $x, y \in \text{int}(C)$, alors il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subset C$ et $\mathcal{B}(y,r) \subset C$. Soient maintenant $\lambda \in [0,1]$ et x' tels que $x' = (1-\lambda)x + \lambda y$. Par convexité de C, $x' \in C$. On va montrer que $\mathcal{B}(x', r) \subset C$, ainsi x' appartiendra à $\text{int}(C)$. Soit $z \in \mathcal{B}(x', r)$. On récrit l'expression de z

$$z = (1-\lambda)z + \lambda z = (1-\lambda)(x + (z - x')) + \lambda(y + (z - x')).$$

Puisque $|z - x'| < r$, alors $x + (z - x') \in \mathcal{B}(x,r)$ et $y + (z - x') \in \mathcal{B}(y,r)$. Par conséquent, ces deux points sont dans C et par convexité, $z \in C$. Donc, $\mathcal{B}(x', r) \subset C$. $\square$

Si $\text{int}(C)$ est convexe, alors on ne peut rien dire sur la convexité de C, et de même si $\overline{C}$ est convexe. En effet,
i) Soit $C = [0,1] \cup \{2\}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, $\text{int}(C) =]0,1[$ qui est convexe mais C n'est pas convexe.
ii) Soit $C = \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, $\overline{C} = \mathbb{R}$ qui est convexe mais C n'est pas convexe.

Proposition 1.2.11. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$K = \text{conv}(\text{Fr}(K))$$

où $\text{Fr}(K) = \overline{K} \setminus \text{int}(K)$ *désigne la frontière de K.*

Démonstration. $\underline{\supset}$: On a, $\text{Fr}(K) = \overline{K} \setminus \text{int}(K) = K \setminus \text{int}(K)$ car K est fermé. Donc, $\text{Fr}(K) \subset K$. Puisque K est convexe, alors $\text{conv}(\text{Fr}(K)) \subset K$.
$\underline{\subset}$: Quitte à faire une translation, on peut supposer que $0 \in \text{int}(K)$. A tout $x \neq 0$ de K on associe la droite Δ passant par 0 et x. Posons $J = K \cap \Delta$. Alors J est un compact convexe d'une droite, c'est donc un intervalle compact qui passe par un point intérieur à K. Les deux extrémité de J étant dans $\text{Fr}(K)$, le segment $[0, x]$ est inclus dans $\text{conv}(\text{Fr}(K))$. Cela pour tout $x \in K$ donc, $K \subset \text{conv}(\text{Fr}(K))$.

$\square$

Nous allons mettre en évidence diverses propriétés de la somme de Minkowski de deux ensembles que nous utiliserons souvent par la suite.

Propriétés 1.2.12. *Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors,*
1) Si $\mu \neq 0$, $\lambda A = \mu(\frac{\lambda}{\mu}A)$ et $\lambda A + \lambda B = \lambda(A+B)$.
2) En général, $(\lambda+\mu)A \subset \lambda A + \mu A$ mais $(\lambda+\mu)A \neq \lambda A + \mu A$.
3) Si l'ensemble A est convexe et $\lambda, \mu \geq 0$ alors $\lambda A + \mu A = (\lambda+\mu)A$.
4) Si l'ensemble A est convexe et symétrique alors $A - A = 2A$.
5) Si l'ensemble A est fermé, alors $A + A = 2A \Longleftrightarrow A$ convexe.
6) Si les ensembles A et B sont convexes, alors l'ensemble $\lambda A + \mu B$ est convexe.
7) $\mathrm{conv}(A+B) = \mathrm{conv}(A) + \mathrm{conv}(B)$.
8) $A + (B \cup C) = (A+B) \cup (A+C)$.
9) Si l'ensemble A est ouvert et B est quelconque, alors $A+B$ est ouvert.
10) Si l'ensemble A est fermé et l'ensemble B est compact, alors $A+B$ est fermé. Toutefois, si B est seulement fermé, le résultat est faux.

Démonstration. On reprend les hypothèses de l'énoncé.
1) Sans véritablement avoir besoin de détailler on écrit

$$\lambda A = \{\lambda a\,;\, a \in A\} = \{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}a\right)\,;\, a \in A\} = \mu\left(\frac{\lambda}{\mu}A\right)$$

et

$$\lambda A + \lambda B = \{\lambda a + \lambda b\,;\, a \in A, b \in B\} = \{\lambda(a+b)\,;\, a \in A, b \in B\} = \lambda(A+B).$$

2) Soit $x \in (\lambda+\mu)A$, alors $x = (\lambda+\mu)a$ pour un certain $a \in A$. Alors, $x = \lambda a + \mu a$, où $a \in A$. Donc, $x \in \lambda A + \mu A$. Ainsi, $(\lambda+\mu)A \subset \lambda A + \mu A$.

On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère $A = ([-1;1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1;1])$ et on choisit $\lambda = \mu = 1$. Alors, $(-1,-1) = (-1,0) + (0,-1)$ appartient à $A + A$ mais il est clair que $(-1,-1)$ n'appartient pas à $2A$.
3) Le sens $\supset$ a été démontré en 2).
$\underline{\subset}$: Soit $x \in \lambda A + \mu A$, alors il existe $a, b \in A$ tels que $x = \lambda a + \mu b$. En écrivant

$$x = (\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}a + \frac{\mu}{\lambda+\mu}b\right)$$

on constate que, par convexité de A, $x \in (\lambda+\mu)A$.
4) Soit A convexe symétrique, alors $-A = A$ et donc

$$A - A = A + A = 2A$$

d'après 3).
5) $\underline{\Leftarrow}$: D'après 3), si A est convexe alors $A + A = 2A$.
$\underline{\Rightarrow}$: La démonstration est similaire à celle avec les fonctions (cf. proposition 1.4.5).

6) Soient $t \in [0,1]$ et $x, y \in \lambda A + \mu B$. Alors, il existe $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$ tels que $x = \lambda a + \mu b$ et $y = \lambda a' + \mu b'$. Ainsi,

$$(1-t)x + ty = \lambda[(1-t)a + ta'] + \mu[(1-t)b + tb'] \in \lambda A + \mu B$$

par convexité des ensembles A et B.
7) $\underline{\subset}$: Par définition de l'enveloppe convexe, $A \subset \text{conv}(A)$ et $B \subset \text{conv}(B)$ et donc, toujours par définition de l'enveloppe convexe, $\text{conv}(A+B) \subset \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$ car l'ensemble $\text{conv}(A) + \text{conv}(B)$ est convexe par 6).
$\underline{\supset}$: On applique la proposition 1.2.7. Soit $x \in \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$, alors $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^m \mu_j b_j$ où $a_i \in A$, $b_j \in B$, $\lambda_i \geq 0$, $\mu_j \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\sum_{j=1}^m \mu_j = 1$. Ainsi,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_j \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_j b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (a_i + b_j).$$

Donc, $x \in \text{conv}(A+B)$.
8)

$$\begin{aligned} x \in A + (B \cup C) &\iff x = a + b \text{ avec } a \in A \text{ et } (b \in B \text{ ou } b \in C) \\ &\iff x = a + b \text{ avec } a \in A \text{ et } b \in B \text{ ou } a \in A \text{ et } b \in C \\ &\iff x \in (A+B) \cup (A+C). \end{aligned}$$

9) D'après la propriété 8),

$$A + B = A + (\cup_{b \in B} \{b\}) = \cup_{b \in B} (A + b).$$

Or, l'ensemble $A + b$ n'est rien d'autre que le translaté de l'ensemble A par le vecteur b. Ainsi, $A + b$ est ouvert. Par conséquent, $\cup_{b \in B}(A + b)$ est ouvert. Autrement dit, l'ensemble $A + B$ est ouvert.
10) On suppose que l'ensemble A est fermé et que l'ensemble B est compact. Soit $(x_n)_n$ une suite de $A + B$ qui converge vers x. On veut montrer que $x \in A + B$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a_n + b_n$ où $a_n \in A$ et $b_n \in B$. Puisque B est compact, il existe une sous-suite $(b_{n_k})_k$ de $(b_n)_n$ qui converge, disons vers b. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} = x_{n_k} - b_{n_k}$. Donc, $\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = \lim_{k \to +\infty} (x_{n_k} - b_{n_k}) = x - b$. Notons $a = x - b$. Puisque A et B sont fermés, $a \in A$ et $b \in B$. Donc, $x \in A + B$.

Par contre, si on considère dans $\mathbb{R}^2$ l'hyperbole $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; xy = 1\}$ et l'axe des abscisses $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,; x = 0\}$, alors $A + B = \mathbb{R}^2 \setminus B$. Donc, $A + B$ n'est pas fermé, tandis que A et B le sont.

□

Définition 1.2.13 (Orthogonal d'un ensemble). *Soit A un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On définit l'orthogonal de l'ensemble A par*

$$A^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \,; \forall y \in A, < x, y >= 0\}.$$

Définition 1.2.14 (Projeté orthogonal sur ensemble)**.** *Soient A et K deux ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. On définit le projeté orthogonal de K sur A par*

$$\mathrm{P}_A(K) = \{x \in A\,;\, \exists u \in A^{\perp}, x+u \in K\}.$$

Proposition 1.2.15. *Soit K un ensemble de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$K \cap e_j^{\perp} \subset \mathrm{P}_{e_j^{\perp}}(K).$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{e_j^{\perp}}(K) &= \{x \in e_j^{\perp}\,;\, \exists u \in (e_j^{\perp})^{\perp}, x+u \in K\}\\ &= \{x \in e_j^{\perp}\,;\, \exists u \in \mathrm{vect}(e_j), x+u \in K\}\\ &= \{x \in e_j^{\perp}\,;\, \exists \lambda \in \mathbb{R}, x+\lambda e_j \in K\}.\end{aligned}$$

Soit $x \in K \cap e_j^{\perp}$, alors $x \in e_j^{\perp}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x + \lambda e_j \in K$, ce λ étant égal à 0. Donc, $x \in \mathrm{P}_{e_j^{\perp}}(K)$.

□

Proposition 1.2.16. *Soient A et K deux ensembles non vides convexes de $\mathbb{R}^n$. Alors, l'ensemble $P_A(K)$ est convexe.*

Démonstration. L'ensemble vide étant convexe, on suppose que l'ensemble $P_A(K)$ n'est pas vide. Soient $x, y \in P_A(K)$ et $\lambda \in [0,1]$. Puisque A est convexe, alors $(1-\lambda)x + \lambda y \in A$. Par ailleurs, il existe $u_1, u_2 \in A^{\perp}$ tels que $x+u_1 \in K$ et $y+u_2 \in K$. En considérant $u = (1-\lambda)u_1 + \lambda u_2$ qui appartient à $A^{\perp}$, alors

$$(1-\lambda)x + \lambda y + u = (1-\lambda)(x+u_1) + \lambda(y+u_2).$$

Donc l'élément $(1-\lambda)x + \lambda y + u$ appartient à K puisque K est convexe. Finalement, $(1-\lambda)x + \lambda y \in P_A(K)$.

□

Définition 1.2.17 (Hyperplan)**.** *Un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.*

Par conséquent, il existe $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que l'hyperplan H a pour équation

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < x, \theta >= \alpha\}$$

où θ est un vecteur normal à H et α vérifie $H = \alpha\theta + \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < x, \theta >= 0\}$. En particulier, $\mathrm{dist}(0, H) = \inf\{|y|, y \in H\} = |\alpha|$. On notera parfois $H_{\theta,\alpha}$ pour un tel H.

Définition 1.2.18 (Demi-espace)**.** *Soit $H_{\theta,\alpha}$ un hyperplan. On appelle demi-espace délimité par l'hyperplan $H_{\theta,\alpha}$ l'un des ensembles*

$$H^{+}_{\theta,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n; <\theta, x>\geq \alpha\} \text{ ou } H^{-}_{\theta,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < \theta, x > \leq \alpha\}.$$

Définition 1.2.19 (Polytope). *On appelle polytope l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.*

Définition 1.2.20 (Polyèdre). *Un polyèdre est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces.*

Définition 1.2.21 (simplexe). *Dans $\mathbb{R}^n$, On appelle simplexe l'enveloppe convexe de $(n+1)$ points non situés sur un même sous-espace affine stricte, c'est-à-dire que ces $(n+1)$ points sont affinement indépendants.*

Définition 1.2.22 (Cône). *Soit A un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. On dit que A est un cône si pour tout $x \in A$ et tout $\lambda \geq 0$, alors $\lambda x \in A$.*

Proposition 1.2.23. *Le volume du cône dans $\mathbb{R}^n$ est $\frac{|\text{base}|_{n-1} \times \text{hauteur}}{\text{n}}$.*

Démonstration. On note OH la hauteur de longueur h du cône C. On place l'origine du repère en O. On considère $\theta \in \mathbb{S}^{n-1} \cap (\mathbb{R}OH)^{\perp}$. Alors,

$$|C| = \int_C \mathrm{d}x = \int_0^h |\{x \in C\,;\, < x, \theta >= t\}|_{n-1}\, \mathrm{d}t.$$

Or, chaque ensemble $\{x \in C\,;\, < x, \theta >= t\}$ est une dilatation de la base de C de rapport $\frac{t}{h}$. Donc,

$$|C| = \int_0^h \left|\frac{t}{h}\text{base}\right|_{n-1} \mathrm{d}t = |\text{base}|_{n-1} \int_0^h \left(\frac{t}{h}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = |\text{base}|_{n-1} \frac{h^n}{n} \frac{1}{h^{n-1}} = \frac{|\text{base}|_{n-1} h}{\text{n}}.$$

□

Définition 1.2.24 (Hyperplan d'appui). *On appelle hyperplan d'appui d'un ensemble C de $\mathbb{R}^n$ tout hyperplan H contenant au moins un point de C et tel que tous les points de C sont situés dans le même demi-espace délimité par H.*

Définition 1.2.25 (Facette). *L'intersection d'un corps convexe avec l'un de ses hyperplans d'appui est appelée une face, et une face de dimension $n-1$ est appelée une facette.*

Définition 1.2.26 (Séparation). *Soient C_1 et C_2 deux ensembles de $\mathbb{R}^n$. On dit que l'hyperplan $H_{\theta,\alpha}$ sépare C_1 et C_2 si $C_1 \subset H^+_{\theta,\alpha}$ et $C_2 \subset H^-_{\theta,\alpha}$ ou vice versa.*

Les ensembles C_1 et C_2 sont strictement séparés par $H_{\theta,\alpha}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $H_{\theta,\alpha-\varepsilon}$ et $H_{\theta,\alpha+\varepsilon}$ séparent C_1 et C_2.

Nous nous attaquons maintenant aux théorèmes de Hahn-Banach en dimension infinie. Nous suivons la démonstration de [BRE].

Théorème 1.2.27 (Hahn-Banach — forme analytique). *Soit E un espace vectoriel réel de dimension quelconque. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant*
1) Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \geq 0$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
2) Pour tous $x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que pour tout $x \in G$, $g(x) \leq p(x)$. Alors, il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g, c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, $f(x) = g(x)$ et telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \leq p(x)$.

La démonstration de ce théorème fait appel au lemme de Zorn, qui est équivalent à l'axiome du choix. Précisons quelques notions avant d'énoncer le lemme de Zorn. On considère P un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre notée $\leq$.

Définition 1.2.28 (Majorant). *Soit $Q \subset P$. On dit que $c \in P$ est un majorant de Q si pour tout $a \in Q$, $a \leq c$.*

Définition 1.2.29 (Elément maximal). *On dit que $m \in P$ est un élément maximal de P si pour tout $x \in P$ tel que $m \leq x$, alors nécessairement $m = x$.*

Définition 1.2.30 (Ensemble inductif). *On dit que P est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de P, c'est-à-dire dont tous les éléments sont comparables, admet un majorant.*

Lemme 1.2.31 (Lemme de Zorn). *Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.*

Dans [BRE], on donne plusieurs références à la démonstration du lemme de Zorn.

Démonstration de Hahn-Banach — forme analytique. On reprend les hypothèses de l'énoncé. On note $D(h)$ l'ensemble de définition d'une fonction h, et on considère l'ensemble

$$\begin{aligned} P \quad = \quad & \{h\,;\, h : D(h) \subset E \to \mathbb{R}, D(h) \text{ sous-espace vectoriel de } E, h \text{ linéaire} \\ & \quad G \subset D(h), h \text{ prolonge } g \text{ et } \forall x \in D(h), h(x) \leq p(x)\}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, P n'est pas vide puisqu'il contient g. On muni P de la relation

$$h_1 \leq h_2 \Longleftrightarrow (D(h_1) \subset D(h_2) \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1)\,.$$

Il est clair que c'est une relation d'ordre. Nous allons montrer que P est inductif. Soit Q un sous-ensemble totalement ordonné de P. Ainsi, $Q = (h_i)_{i \in I}$ pour un certain ensemble I non vide, avec pour tout $i \in I$, $h_i \in P$ et pour tous $i_0, i_1 \in I$, on a soit $h_{i_0} \leq h_{i_1}$ soit $h_{i_1} \leq h_{i_0}$, c'est-à-dire que l'on a $D(h_{i_0}) \subset D(h_{i_1})$ et h_{i_1} prolonge h_{i_0} ou inversement. On définit alors l'ensemble de définition $D(h) = \cup_{i \in I} D(h_i)$ et $h(x) = h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$. Alors, $h \in P$ et pour tout $i \in I$, $D(h_i) \subset D(h)$ et pour tout $x \in D(h_i)$, $h(x) = h_i(x)$ donc h prolonge h_i. Donc, h est un majorant de Q.

On applique alors le lemme de Zorn pour dire que l'ensemble P admet un élément maximal f. Il reste à prouver que $D(f) = E$. On raisonne par l'absurde en supposant que $D(f) \neq E$. Soit alors $x_0 \notin D(f)$. On pose $D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$ et pour $x \in D(f)$, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$$

où α est une constante qui sera fixée ultérieurement de sorte que $h \in P$. On doit donc s'assurer que pour tout $x \in D(f)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0).$$

Grâce à 1) de l'énoncé du théorème de Hahn-Banach, il suffit de vérifier que pour tout $x \in D(f)$,

$$f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \text{ et } f(x) - \alpha \leq p(x + x_0).$$

Autrement dit, il suffit de choisir α tel que

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x)).$$

Un tel choix est possible puisque pour tous $x, y \in D(f)$,

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0).$$

Donc, $f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x)$. Par conséquent, f est majorée par h, $h \in P$ et $h \neq f$. Ce qui contredit la maximalité de f.

$\square$

Définition 1.2.32 (Hyperplan en dimension infinie)**.** *On appelle hyperplan un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in E\,;\, f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire continue sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dorénavant, on suppose de plus que E est normé.

Définition 1.2.33 (Semi-norme)**.** *Une application $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si :*
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \geq 0$, on $p(\lambda x) = \lambda p(x)$
2) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Théorème 1.2.34. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé contenant 0 dans son intérieur. Pour un tel convexe K, on définit sa jauge*

$$p_K : x \mapsto p_K(x) = \inf\{\alpha > 0\,;\, x \in \alpha K\}.$$

Alors, p_K est une semi-norme et on a $K = \{p_K \leq 1\}$. Par ailleurs, cette jauge est paire si et seulement si K est symétrique, autrement dit si $K = -K$.

Démonstration. Tout d'abord, puisque 0 appartient à l'intérieur de K, il existe $M > 0$ tel que $\alpha > M$ implique $\frac{x}{\alpha} \in K$. Donc, l'infimum dans la définition de p_K est bien défini.

Montrons que p_K est une semi-norme. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$.
i) Par définition, $x \in p_K(x)K$ et $\lambda x \in p_K(\lambda x)K$. Mais alors $\lambda x \in \lambda p_K(x)K$ et $x \in \frac{p_K(\lambda x)}{\lambda}K$. Donc, par définition, $p_K(\lambda x) \leq \lambda p_K(x)$ et $p_K(x) \leq \frac{p_K(\lambda x)}{\lambda}$. Ainsi, $p_K(\lambda x) = \lambda p_K(x)$. Par ailleurs, on a clairement $p_K(0) = 0$. Donc, pour tout $\lambda \geq 0$, $p_K(\lambda x) = \lambda p_K(x)$.
ii) Par définition, $x \in p_K(x)K$, $y \in p_K(y)K$ et $x + y \in p_K(x + y)K$. Donc, par convexité de K (cf. propriété 1.2.12), $x + y \in (p_K(x) + p_K(y))K$. Ainsi, $p_K(x + y) \leq p_K(x) + p_K(y)$.

D'autre part, soit $x \in K$, alors $\inf\{\alpha > 0\,;\, x \in \alpha K\} \leq 1$, autrement dit, $p_K(x) \leq 1$. Donc, $x \in \{p_K \leq 1\}$. Réciproquement, l'ensemble K est convexe et contient 0. Donc, pour tout $x \in K$, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, l'élément $\alpha x + (1 - \alpha)0 \in K$. Autrement dit, pour tout $x \in K$ et pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha x \in K$. Ainsi, $\{p_K \leq 1\} \subset K$. Finalement, $K = \{p_K \leq 1\}$.

Par ailleurs,

$$p_K(x) = p_K(-x) \Longleftrightarrow p_K(x) = p_{-K}(x) \Longleftrightarrow K \text{ symétrique.}$$

Ainsi, la jauge p_K est paire si et seulement si l'ensemble K est symétrique. □

Lemme 1.2.35. *Soit $C \subset E$ un ensemble convexe ouvert non vide et soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin C$. Alors, il existe une forme linéaire f sur E telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.*

En particulier, l'hyperplan d'équation $\{f = f(x_0)\}$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Démonstration. Par translation, on suppose que $0 \in C$. On introduit alors la jauge du convexe C que l'on note p. Les principales propriétés de p sont étudiées au théorème 1.2.34. Nous avons également besoin du résultat suivant, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$,

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|.$$

En effet, $0 \in \mathrm{int}(C)$, donc il existe $r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}(0, r)} \subset C$. Donc, pour tout $x \in E$, $\left\|\frac{r}{\|x\|}x\right\| = r$, donc $\frac{r}{\|x\|}x \in C$. Ainsi, $x \in \frac{\|x\|}{r}C$ et donc $p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$.

Maintenant, on considère $G = \mathbb{R}x_0$ et la forme linéaire g définie sur G par $g(tx_0) = t$ où $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in G$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = tx_0$. Si $t \geq 0$, alors

$$p(x) = p(tx_0) = tp(x_0) \geq t$$

car $x_0 \notin C$ et $C = \{x\,;\, p(x) < 1\}$ donc $p(x_0) \geq 1$. Si $t < 0$, alors

$$p(x) = p(tx_0) = p(-t(-x_0)) = (-t)p(-x_0) \geq 0$$

car p est positive. Ainsi, pour tout $x \in G$, on a $g(x) \leq p(x)$. D'après la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que pour tout $x \in E$, $f(x) \leq p(x)$. En particulier, $f(x_0) = 1$ et puisque pour tout $x \in E$,

$$0 \leq f(x) \leq p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$$

alors f est continue en 0 et donc continue sur E car f est linéaire. Pour finir, pour tout $x \in C$, $p(x) < 1$, donc, pour tout $x \in C$, $f(x) < 1$.

□

Lemme 1.2.36. *Soient A et B des ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. La condition $0 \notin A - B$ est équivalente à la condition $A \cap B = \emptyset$.*

Démonstration. $\underline{\Longrightarrow}$: On procède par contraposée en supposant $A \cap B \neq \emptyset$. Alors, il existe $a \in A$ tel que $a \in B$ donc $0 = a - a \in A - B$.
$\underline{\Longleftarrow}$: On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Alors, pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, $a \neq b$. Par conséquent, pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, $a - b \neq 0$. Ainsi, $0 \notin A - B$.

□

Théorème 1.2.37 (Hahn-Banach — première forme géométrique)**.** *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B.*

Démonstration. On pose $C = A - B$, alors l'ensemble C est convexe et ouvert d'après la propriété 1.2.12 et puisque $A \cap B = \emptyset$ alors $0 \notin C$ d'après le lemme 1.2.36. D'après le lemme 1.2.35, il existe $f \in E'$ telle que pour tout $z \in C$,

$$f(z) < f(0) = 0.$$

Autrement dit, pour tout $x \in A$, pour tout $y \in B$, $f(x) < f(y)$. Soit alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$, alors l'hyperplan fermé d'équation $\{f = \alpha\}$ sépare A et B.

□

Théorème 1.2.38 (Hahn-Banach — deuxième forme géométrique)**.** *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes non vides et disjoints. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Démonstration. On pose $\delta = d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} |b-a|$. Supposons que $\delta = 0$. Alors, il existe une suite (a_n) d'éléments de A et une suite (b_n) d'éléments de B telles que $\lim_{n\to+\infty} |b_n - a_n| = 0$. Puisque B est compact, il existe une sous-suite (b_{n_k}) de (b_n) telle que (b_{n_k}) converge vers un élément b de B. Or, $\lim_{k\to+\infty} |b_{n_k} - a_{n_k}| = 0$. Donc, (a_{n_k}) converge vers b. Ce qui est absurde. Donc, $\delta > 0$.

Soit $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$. On pose $A_\varepsilon = A + \mathcal{B}(0,\varepsilon)$, $B_\varepsilon = B + \mathcal{B}(0,\varepsilon)$. Alors, A_ε et B_ε sont des ensembles convexes ouverts non vides et disjoints. D'après le théorème de Hahn-Banach, première forme géométrique, il existe un hyperplan fermé d'équation $\{f = \alpha\}$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large. On a donc pour tout $x \in A$, pour tout $y \in B$ et tout $z \in \mathcal{B}(0,1)$,

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z).$$

Ainsi, pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$,

$$f(x) + \varepsilon \|f\|_{E'} \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon \|f\|_{E'}.$$

On en conclut que A et B sont séparés au sens strict par l'hyperplan fermé $\{f = \alpha\}$ puisque $\|f\|_{E'} \neq 0$.

□

Définition 1.2.39 (Ensemble extrémal)**.** *Soit C un ensemble convexe de E. L'ensemble $L \subset C$ est dit extrémal dans C si pour tous $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in]0,1[$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in L$ implique $x, y \in L$. On note* $\mathrm{extr}(C)$ *l'ensemble des points extrémaux de C.*

Un point extrémal de C est un ensemble extrémal de cardinal 1.

Proposition 1.2.40. *1) L'intersection d'une famille quelconque d'ensembles extrémaux est un ensemble extrémal.*
2) Pour qu'un point $x \in C$ soit extrémal de C, il faut et il suffit que $C \setminus \{x\}$ soit convexe.

Démonstration. 1) Soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ensembles extrémaux inclus dans un convexe C de E. Soient $x, y \in C$ et $\lambda \in]0,1[$ tels que $(1-\lambda)x + \lambda y \in \cap_{i\in I} L_i$. Alors, pour tout $i \in I$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in L_i$. Donc, pour tout $i \in I$, $x, y \in L_i$. Donc, $x, y \in \cap_{i\in I} L_i$.
2)

$$\begin{aligned} x \text{ extrémal de } C &\iff \forall a, b \in C, \forall \lambda \in]0,1[, x = (1-\lambda)a + \lambda b \Longrightarrow a = b = x \\ &\iff \forall a, b \in C \setminus \{x\}, \forall \lambda \in]0,1[, x \neq (1-\lambda)a + \lambda b \\ &\iff \forall a, b \in C \setminus \{x\}, \forall \lambda \in]0,1[, (1-\lambda)a + \lambda b \in C \setminus \{x\} \\ &\iff C \setminus \{x\} \text{ est un ensemble convexe.} \end{aligned}$$

□

Définition 1.2.41 (Point exposé)**.** *Un point x d'un corps convexe K est un point exposé s'il existe un hyperplan d'appui H tel que $H \cap K = \{x\}$.*

On déduit de cette définition que tout point exposé est un point extrémal. cependant, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple dans $\mathbb{R}^2$ d'un rectangle auquel on raccorde un demi-cercle à l'un de ses côtés.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de Krein-Milman en dimension infinie. Pour cela, nous suivons [DEM].

Proposition 1.2.42. *Soit K un ensemble convexe compact dans un espace vectoriel normé réel X de dimension infinie. Alors K admet un point extrémal.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ la famille des ensembles extrémaux compacts de K que l'on ordonne par inclusion. La classe $\mathcal{M}$ n'est pas vide puisqu'elle contient K. Soit une sous-famille $\mathcal{M}'$ totalement ordonnée, c'est-à-dire que pour tous éléments K_1, K_2 de $\mathcal{M}'$, on a soit $K_1 \subset K_2$ soit $K_2 \subset K_1$. Donc, en considérant l'ensemble $\{\cap K_i\,;\, K_i \in \mathcal{M}'\}$, on obtient un minorant qui est dans $\mathcal{M}$. Par conséquent, $\mathcal{M}$ est inductif et on peut donc appliquer le lemme de Zorn. Ainsi, il existe dans $\mathcal{M}$ un ensemble minimal $\mathcal{M}_0$. Il reste à prouver que l'ensemble $\mathcal{M}_0$ est réduit à un point. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\mathcal{M}_0$ possède au moins deux éléments distincts x_0 et y_0. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x_0) \neq f(y_0)$. Sur le compact $\mathcal{M}_0$, la fonction f atteint sa borne inférieure. On pose

$$\mathcal{M}_1 = \{x \in \mathcal{M}_0, f(x) = \inf_{y \in \mathcal{M}_0} f(y)\}.$$

On définit ainsi un sous-ensemble strict de $\mathcal{M}_0$ puisqu'il ne contient pas à la fois x_0 et y_0. Pour obtenir notre contradiction, nous allons montrer que $\mathcal{M}_1$ est un ensemble convexe compact extrémal. L'ensemble $\mathcal{M}_1$ est fermé car c'est l'image réciproque d'un fermé par une application continue et donc $\mathcal{M}_1$ est compact car inclus dans le compact $\mathcal{M}_0$. Par ailleurs, soient $x_1, y_1 \in \mathcal{M}_1$ et soit $\lambda \in [0,1]$, alors

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(y_1) = \inf_{y \in \mathcal{M}_0} f(y).$$

Donc, l'ensemble $\mathcal{M}_1$ est convexe. Enfin, soient $x \in \mathcal{M}_1$ et $z, u \in K$ tels qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ vérifiant $x = (1-\lambda)z + \lambda u$. Puisque $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_0$ et que $\mathcal{M}_0$ est extrémal, on en déduit que $z, u \in \mathcal{M}_0$, ce qui implique que $f(z) \geq f(x)$ et $f(u) \geq f(x)$. Or, $f(x) = (1-\lambda)f(z) + \lambda f(u)$. Les coefficients étant strictement positifs, on en déduit que $f(z) = f(u) = f(x)$, d'où $z, u \in \mathcal{M}_1$. Ainsi, $\mathcal{M}_1$ est un ensemble convexe compact extrémal strictement inclus dans $\mathcal{M}_0$, ce qui contredit la minimalité de $\mathcal{M}_0$.

□

Théorème 1.2.43 (Krein-Milman en dimension infinie)**.** *Soit K un ensemble convexe compact d'un espace vectoriel normé réel X de dimension infinie. Alors,*

$$K = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(K))}.$$

Démonstration. On a évidemment $K \supset \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(K))}$.

L'ensemble $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(K))}$ est un convexe compact de K. On suppose par l'absurde qu'il existe un point $k \in K \setminus \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(K))}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue f et un réel α tels que $f \le \alpha$ sur $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(K))}$ et $f(k) > \alpha$. On considère alors l'ensemble

$$K_1 = \{x \in K, f(x) = \sup_{y \in K} f(y)\}$$

qui est non vide car K est un ensemble compact et f est une fonction continue. Or, $f(k) > 1$ et $f \le 1$ sur $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(K))}$, alors $K_1 \cap \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(K))} = \emptyset$ et a fortiori $K_1 \cap \mathrm{extr}(K) = \emptyset$. De manière analogue à la proposition 1.2.42, on montre que K_1 est un ensemble convexe compact de K donc, toujours d'après la proposition 1.2.42, K_1 possède un point extrémal. Soit x un point extrémal de K_1 et soient $y, z \in K$ tels qu'il existe $\lambda \in]0,1[$ vérifiant $x = (1-\lambda)y + \lambda z$. Alors, $f(x) = (1-\lambda)f(y) + \lambda f(z)$ et par stricte positivité des coefficients, $f(x) = f(y) = f(z)$. Ainsi, $y, z \in K_1$ et donc, x étant extrémal dans K_1, on en déduit que $x = y = z$. Par conséquent, x est extrémal dans K. Ce qui est contradictoire avec le fait que $K_1 \cap \mathrm{extr}(K) = \emptyset$. Donc, $K \subset \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(K))}$. □

1.3 Projection orthogonale sur un convexe fermé

Théorème — Définition 1.3.1. *Soit K un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, il existe un unique élément y_0 de K tel que $d(K,x)$ soit atteinte en y_0 où $d(K,x) = \inf_{y \in K} |y - x|$ désigne la distance euclidienne d'un point à un ensemble. Cet élément s'appelle le projeté orthogonal sur K et on le note $\mathrm{P}_K(x)$.*

Démonstration. Soit K un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe $\rho > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,\rho) \cap K$ est un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, la fonction $y \mapsto |x - y|$ atteint son minimum sur $\mathcal{B}(x,\rho) \cap K$ puisque la distance euclidienne est continue car lipschitzienne. Ainsi, il existe $y_0 \in \mathcal{B}(x,\rho) \cap K$ tel que pour tout $y \in \mathcal{B}(x,\rho) \cap K$, $|x - y_0| \le |x - y| \le \rho$, donc pour tout $y \in K$, $|x - y_0| \le |x - y|$ puisque si $y \in K \setminus \mathcal{B}(x,\rho)$, alors $|x - y| > \rho$.

Montrons maintenant l'unicité de ce y_0. Soient alors y_0 et y_1 deux éléments de K vérifiant que pour tout $y \in K$, $|x - y_0| \le |x - y|$ et $|x - y_1| \le |x - y|$. Par convexité de K, l'élément $z = \frac{y_0 + y_1}{2} \in K$. On utilise alors l'égalité de la médiane pour $|.|$ qui est une norme euclidienne,

$$|y_0 - x + y_1 - x|^2 + |y_0 - x + x - y_1|^2 = 2|y_0 - x|^2 + 2|y_1 - x|^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|y_0 - y_1|^2 &= |y_0 - x + x - y_1|^2 \\
&= 2|y_0 - x|^2 + 2|y_1 - x|^2 - |y_0 + y_1 - 2x|^2 \\
&= 2|y_0 - x|^2 + 2|y_1 - x|^2 - 4|z - x|^2 \\
&\leq 2|z - x|^2 + 2|z - x|^2 - 4|z - x|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $y_0 = y_1$.

On note $y_0 = \mathrm{P}_K(x)$ qui existe et est unique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ lorsque K est un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, comme on vient de le voir. Ainsi, la fonction $\mathrm{P}_K : \mathbb{R}^n \to K$ est bien définie et on appelle cette fonction la projection orthogonale sur K. De plus, cette fonction vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\mathrm{P}_K(x) \in K$ tel que pour tout $y \in K$,

$$|x - \mathrm{P}_K(x)| \leq |x - y|.$$

Or, par définition, la distance de x à K est $d(K, x) = \inf_{y \in K} |x - y|$, par conséquent, $|x - \mathrm{P}_K(x)| = d(x, K)$.

Pour $x \notin K$, on note $u_K(x) = \frac{x - \mathrm{P}_K(x)}{|x - \mathrm{P}_K(x)|}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{P}_K(x)x}$ normalisé qui est également un vecteur normal à K en $\mathrm{P}_k(x)$.

□

Proposition 1.3.2. *Soit K un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. L'application P_K vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $y \in K$*

$$< x - \mathrm{P}_K(x), y - \mathrm{P}_K(x) > \leq 0.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in K$. On a vu que $\mathrm{P}_K(x) \in K$. Puisque K est convexe, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t)y + t\mathrm{P}_K(x) \in K$. Il vient que,

$$|x - \mathrm{P}_K(x)|^2 \leq |x - (1 - t)y - t\mathrm{P}_K(x)|^2.$$

On développe le terme de gauche, on obtient

$$|x - \mathrm{P}_K(x)|^2 = |x|^2 - 2 < x, \mathrm{P}_K(x) > + |\mathrm{P}_K(x)|^2.$$

On développe le terme de droite, on obtient

$$\begin{aligned}
|x - (1 - t)y - t\mathrm{P}_K(x)|^2 = &|x|^2 - 2(1 - t) < x, y > +2t(1 - t) < y, \mathrm{P}_K(x) > \\
&-2t < x, \mathrm{P}_K(x) > +(1 - t)^2|y|^2 + t^2|\mathrm{P}_K(x)|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & (1 - t)\,(-2 < x, y > +2 < x, \mathrm{P}_K(x) > \\
& -(t + 1)|\mathrm{P}_K(x)|^2 + (1 - t)|y|^2 + 2t < y, \mathrm{P}_K(x) >\big).
\end{aligned}$$

On divise par $(1-t)$ en ayant pris $t \in]0,1[$ puis on fait tendre t vers 1. On obtient alors,

$$\begin{array}{lll} 0 & \leq & -2 < x, y > + 2 < x, \mathrm{P}_K(x) > -2\,|\mathrm{P}_K(x)|^2 + 2 < y, \mathrm{P}_K(x) > \\ 0 & \leq & - < x, y > + < x, \mathrm{P}_K(x) > - |\mathrm{P}_K(x)|^2 + < y, \mathrm{P}_K(x) > \\ 0 & \leq & < x - \mathrm{P}_K(x), \mathrm{P}_K(x) - y > . \end{array}$$

De manière équivalente,

$$< x - \mathrm{P}_K(x), y - \mathrm{P}_K(x) > \leq 0.$$

□

Proposition 1.3.3. *Soit K un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. La projection sur K est une fonction 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$|\mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y)| \leq |x - y|.$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathrm{P}_K(x) = \mathrm{P}_K(y)$ le résultat est immédiat. On suppose alors que $\mathrm{P}_K(x) \neq \mathrm{P}_K(y)$. D'après la proposition 1.3.2,

$$< \mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y), \mathrm{P}_K(x) - x > \leq 0$$

et

$$< \mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y), y - \mathrm{P}_K(y) > \leq 0.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$< \mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y), \mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y) + y - x > \leq 0.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{array}{rll} |\mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y)|^2 & \leq & < \mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y), x - y > \\ & \leq & |\mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y)||x - y|. \end{array}$$

En divisant par $|\mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y)|$ qui est différent de 0 par hypothèse, on obtient

$$|\mathrm{P}_K(x) - \mathrm{P}_K(y)| \leq |x - y|.$$

□

Proposition 1.3.4. *Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors la projection sur U est une fonction linéaire.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $y \in U$, où U est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$. Alors, le symétrique de y par rapport à $P_U(x)$, c'est-à-dire $y' = 2P_U(x) - y$, appartient à U. Ainsi, d'après la proposition 1.3.2,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \; < x - P_U(x), P_U(x) - y' > \\ &= \; < x - P_U(x), P_U(x) - 2P_U(x) + y > \\ &= \; < x - P_U(x), y - P_U(x) > \\ &\leq \; 0. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $y \in U$, $< x - P_U(x), y - P_U(x) >= 0$. Ainsi, on a la caractérisation

$$z = P_U(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in U \text{ et } x - z \in U^{\perp}.$$

Dans le cas où U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors d'après la caractérisation ci-dessus, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u := \lambda P_U(x) + P_U(y) \in U$$

et,

$$(\lambda x + y) - u = \lambda(x - P_U(x)) + y - P_U(y) \in U^{\perp}.$$

Donc, toujours d'après la caractérisation ci-dessus,

$$u = P_U(\lambda x + y).$$

□

Nous allons nous servir de la projection pour redémontrer la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, mais cette fois-ci en dimension finie. L'avantage est que nous n'avons alors pas besoin de l'axiome du choix.

Proposition 1.3.5. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $x \notin K$. Alors l'hyperplan H passant par $\mathrm{P}_K(x)$ et orthogonal à $u_K(x)$ est un hyperplan d'appui à K.*

Démonstration. D'après la proposition 1.3.2, $< x - \mathrm{P}_K(x), y - \mathrm{P}_K(x) > \leq 0$, pour tout $y \in K$. Donc, pour tout $y \in K$, $< u_K(x), y - \mathrm{P}_K(x) > \leq 0$. Puisque $H = \{z \in \mathbb{R}^n \,;\, < z, u_K(x) > = < \mathrm{P}_K(x), u_K(x) >\}$, cela signifie que pour tout $y \in K$, alors $y \in H^-$. Autrement dit, $K \subset H^-$.

□

Corollaire 1.3.6. *Soit K un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors pour chaque point de la frontière de K il existe un hyperplan d'appui à K en ce point.*

Démonstration. On suppose que $0 \in \mathrm{int}(K)$. Soit x un élément de $\mathrm{Fr}(K)$. On pose, pour tout n, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x$. Puisque pour tout n, $x_n \notin K$, on peut définir la suite $(u_K(x_n))$. Il s'agit d'une suite de $\mathbb{S}^{n-1}$ qui est compact. On peut donc en extraire une sous-suite $u_K(x_{n_k})$ qui converge vers $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. De plus, la suite (x_n) converge vers x et on a vu que P_K est lipschitzienne, donc $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_K(x_n) = \mathrm{P}_K(x) = x$. Donc, pour tout $y \in K$,

$$< y - \mathrm{P}_K(x_{n_k}), u_K(x_{n_k}) > \leq 0.$$

Par passage à la limite quand $k \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient

$$< y - x, u > \leq 0.$$

Donc, l'hyperplan $H = \{z \in \mathbb{R}^n \,;\, < z - x, u >= 0\}$ est un hyperplan d'appui à K en x.

□

Proposition 1.3.7. *Soit C un ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \notin C$. Alors, C et $\{x\}$ peuvent être séparés. Si de plus C est fermé, alors C et $\{x\}$ peuvent être strictement séparés.*

Démonstration. Si l'ensemble C est fermé, alors l'hyperplan qui passe par $\mathrm{P}_C(x)$ et orthogonal à $u_C(x)$ est un hyperplan d'appui de C d'après la proposition 1.3.5. Ainsi, l'hyperplan parallèle passant par le point $\frac{\mathrm{P}_C(x)+x}{2}$ sépare strictement C et $\{x\}$.

Si C n'est pas fermé et $x \notin \mathrm{Fr}(C)$, alors l'hyperplan séparant $\overline{C}$ et $\{x\}$ au sens strict sépare C et $\{x\}$ au sens strict.

Si C n'est pas fermé et $x \in \mathrm{Fr}(C)$. Alors, d'après le corollaire 1.3.6, il existe un hyperplan d'appui à $\mathrm{Fr}(C)$ en x. Toutefois, on ne peut pas exiger que la séparation soit stricte.

□

Lemme 1.3.8. *Soient A et B deux ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. Les ensembles A et B peuvent être (strictement) séparés si et seulement si les ensembles $A - B$ et $\{0\}$ peuvent être (strictement) séparés.*

Démonstration. On traite le cas strictement séparé, le cas séparé s'en déduit en prenant $\varepsilon = 0$.
$\underline{\Longrightarrow}$: On suppose que les ensembles A et B sont strictement séparés par $H_{\theta,\alpha}$, autrement dit il existe $\varepsilon > 0$ tel que par exemple $A \subset H^-_{\theta,\alpha-\varepsilon}$ et $B \subset H^+_{\theta,\alpha+\varepsilon}$. Soit $x \in A - B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a - b$. Des inégalités $< a, \theta > \leq \alpha - \varepsilon$ et $< b, \theta > \geq \alpha + \varepsilon$, on déduit que $< x, \theta > \leq -2\varepsilon$. Donc les ensembles $A - B$ et $\{0\}$ sont strictement séparés par l'hyperplan $H_{\theta,-\varepsilon}$.
$\underline{\Longleftarrow}$: On suppose que les ensembles $A - B$ et $\{0\}$ peuvent être strictement séparés. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $x \in A - B$

$< x, \theta > \leq -2\varepsilon$. Autrement dit, pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a $< a, \theta > - < b, \theta > \leq -2\varepsilon$. On pose $\alpha = \sup_{a \in A} < a, \theta >$ ainsi que $\beta = \inf_{b \in B} < b, \theta >$. Alors, $\alpha - \beta \leq -2\varepsilon$, donc $\beta \geq 2\varepsilon + \alpha$. Par conséquent, pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$,

$$< b, \theta > \geq \beta \geq (\alpha + \varepsilon) + \varepsilon \geq (\alpha + \varepsilon) - \varepsilon \geq < a, \theta > .$$

Finalement, l'hyperplan $H_{\theta, \alpha+\varepsilon}$ sépare strictement A et B.

□

Ainsi, on ramène la séparation de deux ensembles quelconques à la séparation d'un ensemble et d'un ensemble réduit à un point.

Théorème 1.3.9 (1ère forme géométrique de Hahn-Banach)**.** *Soient A et B deux ensembles convexes non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors A et B peuvent être séparés.*

Démonstration. Par hypothèse, $A \cap B = \emptyset$. Donc, d'après le lemme 1.2.36, $0 \notin A - B$. De plus, les ensembles A et B sont convexes, donc d'après la propriété 1.2.12, l'ensemble $A - B$ est convexe. D'après la proposition 1.3.7, les ensembles $A - B$ et $\{0\}$ peuvent être séparés. Finalement, par le lemme 1.3.8, les ensembles A et B peuvent être séparé.

□

Théorème 1.3.10 (2ème forme géométrique de Hahn-Banach)**.** *Soient A et B deux ensembles convexes non vides de $\mathbb{R}^n$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Si on suppose de plus que A est fermé et B est compact, alors A et B peuvent être séparés au sens strict.*

Démonstration. La démonstration est identique à la démonstration du théorème 1.3.9, sauf que cette fois on sait de plus que l'ensemble $A - B$ est fermé puisque l'ensemble A est fermé et l'ensemble B est compact d'après la propriété 1.2.12, donc la séparation est cette fois stricte.

□

En dimension infinie, il est faux que deux convexes fermés disjoints puissent être séparés par un hyperplan, comme c'est le cas en dimension finie. En effet, considérons les ensembles $l^1(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \,;\, \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$, D la droite engendrée par $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ et U l'ensemble défini par

$$U = \{(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \,;\, \xi_0 \geq 0, \forall n \geq 1, |n^3 \xi_n - n| \leq \xi_0\}.$$

On a, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n - \xi_0}{n^3} \leq \xi_n \leq \frac{n + \xi_0}{n^3}.$$

Donc, $|\xi_n| \leq \max\left(|\frac{n-\xi_0}{n^3}|, |\frac{n+\xi_0}{n^3}|\right) = \frac{n+\xi_0}{n^3}$. ce qui établit $U \subset l^1(\mathbb{N})$. La convexité de U résulte de $(1-\lambda)\xi_0 + \lambda\eta_0 \geq 0$ et de

$$|n^3((1-\lambda)\xi_n+\lambda\eta_n)-n| = |(1-\lambda)(n^3\xi_n-n)+\lambda(n^3\eta_n-n)| \leq (1-\lambda)\xi_0+\lambda\eta_0.$$

Par ailleurs, $D \cap U = \emptyset$, sinon soit $\xi \in D \cap U$, alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\xi_0 = \lambda_0$ et puisque pour tout $n \geq 1$, $\xi_n = 0$ et $|n^3\xi_n - n| \leq \xi_0$, alors pour tout $n \geq 1$, $n \leq |\xi_0|$, ce qui entraîne une contradiction quand n tend vers $+\infty$. L'ensemble U est fermé. Soit en effet une suite $(\eta^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U qui converge vers η dans $l^1(\mathbb{N})$, ce qui se traduit par

$$\lim_{k\to+\infty} \|\xi^{(k)} - \xi\|_{l^1(\mathbb{N})} = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\xi_n^{(k)} - \xi_n| \leq \|\xi^{(k)} - \xi\|_{l^1(\mathbb{N})}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\xi_n^{(k)})$ converge vers ξ_n. L'hypothèse d'appartenance à U s'écrit $|n^3\xi_n^{(k)} - n| \leq |\xi_0^{(k)}|$, ce qui montre par passage à la limite que $|n^3\xi_n - n| \leq |\xi_0|$. De plus, pour tout k, $\xi_0^{(k)} \geq 0$, donc $\xi_0 \geq 0$. Ainsi, $\xi \in U$. Montrons maintenant que $U - D$ est partout dense. Soit $\xi \in l^1(\mathbb{N})$ et $\varepsilon > 0$. Soit N assez grand pour que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |\xi_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $X_0 = \sup_{1\leq n\leq N} |\xi_n n^3 - n|$. Alors,

$$u := X_0 e_0 + \sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e_n \in U.$$

En effet, on a $u_0 = X_0 \geq 0$, pour les N termes suivants,

$$|n^3 u_n - n| = |n^3\xi_n - n| \leq X_0$$

et pour les autres termes, $n^3 u_n - n = 0$. Il en résulte que

$$v := u + (\xi_0 - X_0)e_0 \in U - D.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\|v - \xi\|_{l^1(\mathbb{N})} &= \Bigg| X_0 e_0 + \sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e_n + \xi_0 e_0 \\
&\qquad - X_0 e_0 - \xi_0 e_0 - \sum_{n=1}^{N} \xi_n e_n - \sum_{n\geq N+1} \xi_n e_n \Bigg| \\
&\leq \sum_{n\geq N+1} |\frac{1}{n^2} - \xi_n| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, $U - D$ est partout dense.

Supposons qu'il existe un hyperplan fermé qui les sépare. Cela signifie qu'il existe $\beta \in l^\infty(\mathbb{N})$, qui est le dual topologique de $l^1(\mathbb{N})$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $u \in U$

$$< \beta, u > \geq \alpha$$

et pour tout $v \in D$,

$$< \beta, v > \leq \alpha.$$

Soit alors $v \in U - D$, $v = u - d$, alors

$$< \beta, v > = < \beta, u > - < \beta, d > \geq 0.$$

Donc, pour tout $v \in U - D$, $< \beta, v > \geq 0$. L'ensemble $U - D$ serait donc contenu dans un demi-espace fermé et, puisque $\overline{U - D} = l^1(\mathbb{N})$, l'espace tout entier serait contenu dans ce demi-espace, ce qui est contradictoire.

Théorème 1.3.11 (Krein-Milman)**.** *Tout ensemble convexe compact C de $\mathbb{R}^n$ admet au moins un point extrémal et C est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Autrement dit,* $\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(C)) = C$.

Démonstration. $\underline{\subset}$: Par définition d'un ensemble extrémal, $\mathrm{extr}(C) \subset C$, et par définition de l'enveloppe convexe il s'ensuit que $\mathrm{conv}(\mathrm{extr}(C)) \subset C$.

$\underline{\supset}$: On procède par récurrence sur la dimension de C.

Si $\dim(C) = 1$, alors C est un intervalle compact qui est bien égal à l'enveloppe convexe de ses deux extrémités.

On suppose la propriété démontrée pour C de dimension m et soit C de dimension $m + 1$. Soit x un point de C. Si $x \in \mathrm{Fr}(C)$, alors d'après la proposition 1.3.6, il existe un hyperplan d'appui H pour C en x. Le convexe $C \cap H$ est un compact de dimension inférieure à m. Donc, l'ensemble $C \cap H$ possède des points extrémaux et les points extrémaux de $C \cap H$ sont des points extrémaux de C. En effet, si $x \in C \cap H$ est un point extrémal de $C \cap H$, supposons que $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ avec $x_1, x_2 \in C$ et $\lambda \in]0, 1[$. Puisque H est un hyperplan d'appui, il existe $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que H soit d'équation $< x, \theta > = \alpha$. Pour $y \in C$, on a par exemple $< y, \theta > \geq \alpha$, donc $< x, \theta > = \alpha = (1 - \lambda) < x_1, \theta > + \lambda < x_2, \theta >$. On en déduit que $< x_1, \theta > = < x_2, \alpha > = \alpha$, ce qui signifie que $x_1, x_2 \in H$, donc $x_1, x_2 \in C \cap H$. Finalement, $x = x_1 = x_2$. Si x n'appartient pas à $\mathrm{Fr}(C)$, alors $x \in \mathrm{int}(C)$, donc toute droite passant par x intersecte $\mathrm{Fr}(C)$ en deux points y_1, y_2 qui sont combinaisons convexes de points extrémaux de C. Alors, x étant combinaison convexe de y_1 et y_2, x est combinaison convexe de points extrémaux de C.

On vient également de montrer que tout ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$ admet au moins un point extrémal.

□

Corollaire 1.3.12. *Tout corps convexe K de $\mathbb{R}^n$ possède au moins $n + 1$ points extrémaux.*

Démonstration. Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. On procède par l'absurde. On suppose que K possède strictement moins de $n+1$ points extrémaux. Alors, d'après le théorème de Carathéodory (cf. théorème 1.2.9), l'enveloppe convexe des points extrémaux de K est alors de dimension strictement inférieure à n. Par le théorème de Krein-Milman, l'ensemble K est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Par conséquent, K est de dimension strictement inférieure à n, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'intérieur non vide de K.

□

1.4 Fonctions convexes

Définition 1.4.1 (Fonction convexe). *Une fonction f définie sur un ensemble convexe C de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est convexe si pour tous $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Définition 1.4.2 (Fonction concave). *Une fonction f définie sur un ensemble convexe C de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est concave si $-f$ est une fonction convexe.*

Par conséquent, on déduira toutes les propriétés des fonctions concaves à l'aide des fonctions convexes.

Par exemple, une fonction f concave vérifie pour tous $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Proposition 1.4.3. *Si f est convexe, alors pour tous $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ positifs tels que $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$,*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k).$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle avec les ensembles. On procède par récurrence. Si $\lambda_1 = 1$ alors on a évidemment $f(\lambda_1 x_1) \leq \lambda_1 f(x_1)$ et par définition de la convexité, on a pour $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

On suppose maintenant que si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ alors

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k)$$

et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ tels que $\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j\right) &= f\left((\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\right) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}\right) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\right)\left[\frac{\lambda_1 f(x_1)}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} + \cdots + \frac{\lambda_k f(x_k)}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}\right] + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).
\end{aligned}$$

□

On peut prouver, sous réserve de continuité, que l'inégalité de convexité peut être réduite au cas où les coefficients sont égaux à l'inverse d'un entier.

Définition 1.4.4 (Fonction mi-convexe). *On dit qu'une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est mi-convexe si pour tout couple $(x, y) \in I^2$,*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Proposition 1.4.5. *Une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est mi-convexe si et seulement si l'inégalité de convexité*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

est satisfaite pour tout $(x, y) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Démonstration. $\underline{\Longleftarrow}$: Ce sens est évident en choisissant $\lambda = \frac{1}{2}$.

$\underline{\Longrightarrow}$: Tout d'abord, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$,

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)).$$

Pour $n = 2$, il s'agit de l'hypothèse de mi-convexité.

Pour démontrer la propriété au rang n, on montre en premier les propriétés suivantes :

a) Si la propriété de convexité est vraie pour n, alors elle est vraie pour $2n$.

b) Si la propriété de convexité est vraie pour $n+1$, alors elle est vraie pour n.

En effet,

a) On suppose la propriété vraie au rang n. Alors,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2n}}{2n}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)+f\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}+\frac{f(x_{n+1})+\cdots+f(x_{2n})}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2n}(f(x_1)+\cdots+f(x_{2n})).
\end{aligned}$$

b) On suppose la propriété vraie pour $n+1$. Alors,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{1}{n+1}\left(x_1+\cdots+x_n+\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\right)\\
&\leq \frac{1}{n+1}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n+1}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)).$$

Autrement dit,

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)).$$

On peut alors terminer la récurrence. On suppose la propriété vraie au rang $n\in\mathbb{N}^*$. Alors d'après a), la propriété est vraie pour $2n$. D'après la propriété b), la propriété est alors vraie pour $2n-1$. Et ainsi de suite jusqu'à $n+1$. Finalement, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)).$$

Soit maintenant $\lambda\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$, alors $\lambda=\frac{p}{q}$ où $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}^*$. Soient $x,y\in I$, alors

$$\begin{aligned}
f((1-\lambda)x+\lambda y) &= f\left(\frac{q-p}{q}x+\frac{p}{q}y\right)\\
&= f(\frac{1}{q}(\underbrace{x+\cdots+x}_{q-p\,fois}+\underbrace{y+\cdots+y}_{p\,fois}))\\
&\leq \frac{1}{q}(\underbrace{f(x)+\cdots+f(x)}_{q-p\,fois}+\underbrace{f(y)+\cdots+f(y)}_{p\,fois})\\
&= (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.6. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est mi-convexe et continue, alors f est convexe.*

Démonstration. D'après la proposition 1.4.5, la fonction f vérifie pour tout point $(x, y) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Soit $\lambda \in [0, 1]$, alors il existe une suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels de $[0, 1]$ telle que $\lim_{i \to +\infty} \lambda_i = \lambda$. Donc, pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour tous $(x, y) \in I^2$,

$$f((1-\lambda_i)x + \lambda_i y) \leq (1-\lambda_i)f(x) + \lambda_i f(y).$$

Par passage à la limite lorsque $i \to +\infty$ dans cette inégalité, on obtient en utilisant la continuité de f,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

□

Proposition 1.4.7 (Lemme des trois cordes)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$, alors*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Démonstration. On reprend les hypothèses du théorème. Puisque $a < b < c$, alors il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $b = (1-\lambda)a + \lambda c$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{f((1-\lambda)a + \lambda c) - f(a)}{b - a} \\ &\leq \frac{(1-\lambda)f(a) + \lambda f(c) - f(a)}{b - a} \\ &= \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{f(c) - f(b)}{c - b} &= \frac{f(c) - f((1-\lambda)a + \lambda c))}{c - b} \\ &\geq \frac{f(c) - (1-\lambda)f(a) - \lambda f(c)}{c - b} \\ &= \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.8. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soient $a, b \in I$. On définit sur I la fonction « pente à droite en a » par*

$$p_d^a : t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

et la fonction « pente à gauche en c » par

$$p_g^c : t \mapsto \frac{f(c) - f(t)}{c - t}.$$

Alors, ces deux fonctions sont croissantes.

Corollaire 1.4.9. *Soit f une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, f est dérivable à droite et à gauche en tout point de l'intérieur de I. En particulier, f est continue en tout point de l'intérieur de I. De plus, en notant f'_g (resp. f'_d) la dérivée à gauche (resp. à droite) de f, alors on a $f'_g \leq f'_d$.*

Démonstration. Soit x_0 un point intérieur à I et soient h, k deux nombres strictement positifs tels que $x_0 - k$ et $x_0 + h$ appartiennent à l'intérieur de I. On utilise la proposition 1.4.7,

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - k)}{k} \leq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

De plus, le corollaire 1.4.8 nous permet de dire que le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ décroît lorsque h tend vers 0 en décroissant et à k fixé, ce rapport est minoré. Donc $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie. De même, $\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k}$ existe et est finie. On en déduit l'existence des dérivées à droite et à gauche de f en x_0, notées respectivement $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ vérifiant, par passage à la limite lorsque $h, k \to 0$ dans l'inégalité précédente,

$$f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0).$$

□

Définition 1.4.10 (Epigraphe d'une fonction)**.** *Soit f une fonction définie sur un ensemble convexe C de $\mathbb{R}^n$. On appelle épigraphe de f, noté* epi(f)*, l'ensemble*

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in C \times \mathbb{R}\,;\, y \geq f(x)\}.$$

Proposition 1.4.11. *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$. Alors, f est une fonction convexe si et seulement si l'ensemble* epi(f) *est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Démonstration. $\Rightarrow$: On suppose f convexe et soient $(x,t),(y,s) \in \text{epi}(f)$. Alors, $t \geq f(x)$ et $s \geq f(y)$. Par conséquent, pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq (1-\lambda)t + \lambda s.$$

Ainsi, $((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)t + \lambda s) \in \text{epi}(f)$. Finalement, l'ensemble $\text{epi}(f)$ est convexe.
$\Leftarrow$: Supposons maintenant que l'ensemble $\text{epi}(f)$ est convexe. Soient $x, y \in C$. Par définition, les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ appartiennent à $\text{epi}(f)$. Donc, pour tout λ dans $[0,1]$, le point $((1-\lambda)x+\lambda y, (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y))$ appartient à $\text{epi}(f)$. Autrement dit, $(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y) \geq f((1-\lambda)x+\lambda y)$. C'est-à-dire que f est convexe.

$\square$

Définition 1.4.12 (Fonction log-convexe)**.** *On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est log-convexe si la fonction $\log(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est convexe. De même, une fonction f est log-concave si la fonction $\log(f)$ est concave.*

Dans la suite, les propriétés issues de telles fonctions ne se feront que sur les fonctions log-concaves. Pourquoi ce choix, parce que dans la théorie de la géométrie convexe, nous avons affaire plutôt à des fonctions log-concaves que log-convexes, donc pour ne pas perdre de temps à convertir les propriétés des fonctions log-concaves à partir des fonctions log-convexes, nous travaillerons donc directement sur les fonctions log-concaves.

Proposition 1.4.13. *Si la fonction f est log-concave alors elle vérifie pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in [0,1]$,*

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}.$$

Démonstration. A partir des hypothèses, on a

$$\begin{aligned}
\log(f((1-\lambda)x + \lambda y)) &\geq (1-\lambda)\log(f(x)) + \lambda \log(f(y)) \\
&= \log(f(x)^{1-\lambda}) + \log(f(y)^{\lambda}) \\
&= \log(f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}).
\end{aligned}$$

En passant à l'exponentielle qui est une fonction croissante, on obtient le résultat voulu.

$\square$

On peut dire aussi que f est log-concave si et seulement si $f = \mathrm{e}^{-V}$ où $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe. En effet, si f est log-concave, alors $\log(f) = -V$ où V est une fonction convexe, et donc $f = \mathrm{e}^{-V}$ avec V convexe. Réciproquement, si $f = \mathrm{e}^{-V}$ avec V une fonction convexe, alors $\log(f) = -V$ donc f est log-concave.

Propriétés 1.4.14. *1) Une fonction constante est log-concave.*
2) Si l'ensemble K est convexe, alors la fonction $\mathbf{1}_K$ est log-concave.
3) Le produit de deux fonctions log-concaves est log-concave.
4) Une fonction concave est log-concave mais la réciproque est fausse. Attention, une fonction log-convexe est convexe mais la réciproque est fausse.

Démonstration. 1) Soit f une fonction constante égale à $c \geq 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = c = \mathrm{e}^{-(-\log(c))}.$$

La fonction $x \mapsto -\log(c)$ étant clairement convexe, on en déduit que f est log-concave.

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$. On veut montrer

$$\mathbf{1}_K((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \mathbf{1}_K(x)^{1-\lambda}\mathbf{1}_K(y)^{\lambda} \ (= \mathbf{1}_K(x)\mathbf{1}_K(y)).$$

Or,

$$\mathbf{1}_K(x)\mathbf{1}_K(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K \text{ et } y \in K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais, si $x \in K$ et $y \in K$, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$, puisque K est convexe, et donc $\mathbf{1}_K((1-\lambda)x + \lambda y) = 1$. Donc,

$$\mathbf{1}_K((1-\lambda)x + \lambda y) \geq \mathbf{1}_K(x)^{1-\lambda}\mathbf{1}_K(y)^{\lambda}.$$

3) Soient f, g deux fonctions log-concaves, alors il existe deux fonctions convexes V et W telles que $f(x) = \mathrm{e}^{-V(x)}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-W(x)}$. Donc,

$$f(x)g(x) = \mathrm{e}^{-(V(x)+W(x))} = \mathrm{e}^{-Z(x)}.$$

Or,

$$\begin{aligned} Z((1-\lambda)x + \lambda y) &= V((1-\lambda)x + \lambda y) + W((1-\lambda)x + \lambda y) \\ &\leq (1-\lambda)V(x) + \lambda V(y) + (1-\lambda)W(x) + \lambda W(y) \\ &= (1-\lambda)Z(x) + \lambda Z(y). \end{aligned}$$

Donc, Z est convexe.

On a même montré que la somme de deux fonctions convexes est encore convexe.

4) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$. Soit f une fonction concave, alors

$$\begin{aligned} \log(f((1-\lambda)x + \lambda y)) &\geq \log((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)) \\ &\geq (1-\lambda)\log(f(x)) + \lambda \log(f(y)). \end{aligned}$$

Soit f une fonction log-convexe, alors

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &= \mathrm{e}^{\log(f((1-\lambda)x+\lambda y))} \\ &\leq \mathrm{e}^{(1-\lambda)\log(f(x))+\lambda\log(f(y))} \\ &\leq (1-\lambda)\mathrm{e}^{\log(f(x))} + \lambda \mathrm{e}^{\log(f(x))} \\ &= (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

Pour les deux réciproques on peut considérer la même fonction $f : x \mapsto x^2$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction vérifie $\log(f(x)) = 2\log(x)$ qui est concave alors que f est convexe. Donc non seulement le log n'est pas convexe mais en plus c'est une fonction log-concave qui n'est pas concave.

$\square$

Proposition 1.4.15. *Soit I un intervalle symétrique de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction log-concave paire. Alors, f atteint son maximum en 0 et est décroissante sur $\mathbb{R}_+ \cap I$ et croissante sur $\mathbb{R}_- \cap I$.*

Démonstration. Soit $x \in I$. Alors,

$$f(0) = f\left(\frac{x-x}{2}\right) \geq \sqrt{f(x)f(-x)} = \sqrt{f(x)f(x)} = f(x).$$

Donc, $\|f\|_\infty = f(0)$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+ \cap I$ tels que $x < y$. Alors,

$$f(x) = f\left(\frac{y-x}{y}0 + \frac{x}{y}y\right) \geq f(0)^{\frac{y-x}{y}} f(y)^{\frac{x}{y}} \geq f(y)^{\frac{y-x}{y}} f(y)^{\frac{x}{y}} = f(y).$$

Donc, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+ \cap I$. Par parité, f est croissante sur $\mathbb{R}_- \cap I$.

$\square$

On termine par une propriété utile à l'annexe concernant les fonctions Gamma et Bêta d'Euler.

Proposition 1.4.16. *Soit I un intervalle inclus dans $]0, +\infty]$. Soit ϕ une fonction positive intégrable sur I. Alors la fonction $\psi : x \mapsto \int_I \phi(t)t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est log-convexe sur $]0, +\infty[$.*

Démonstration. Soient $x, y > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors,

$$\begin{aligned}
\psi((1-\lambda)x + \lambda y) &= \int_I \phi(t)t^{(1-\lambda)x+\lambda y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_I \phi(t)^{(1-\lambda)+\lambda}\, t^{(1-\lambda)x+\lambda y-((1-\lambda)+\lambda)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_I \left(\phi(t)t^{x-1}\right)^{1-\lambda} \left(\phi(t)t^{y-1}\right)^{\lambda}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \left(\int_I \phi(t)t^{x-1}\,\mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} \left(\int_I \phi(t)t^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)^{\lambda} \\
&= \psi(x)^{1-\lambda}\psi(y)^{\lambda}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hölder avec le fait que $(1-\lambda) + \lambda = 1$ et ϕ positive. Par conséquent, ψ est log-convexe.

$\square$

Corollaire 1.4.17. *Les fonctions Gamma et Bêta d'Euler sont log-convexes.*

1.5 Ensembles convexes et espaces vectoriels normés

Nous allons voir dans cette section que les espaces vectoriels normés de dimension n sont en correspondance avec les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.5.1. *Soit p une semi-norme. Alors, p vérifie*
1) $p(0) = 0$.
2) Si de plus p est paire alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.
3) p est convexe et donc p est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. 1) $p(0) = p(0.x) = 0p(x) = 0$.
2) Si de plus p est paire alors pour tout $\lambda \leq 0$

$$p(\lambda x) = p(-\lambda x) = -\lambda p(x).$$

Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

3) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$p((1-\lambda)x + \lambda y) \leq p((1-\lambda)x) + p(\lambda y) = (1-\lambda)p(x) + \lambda p(y).$$

Donc, p est convexe et donc, d'après le corollaire 1.4.9, p est continue sur $\mathbb{R}^n$.

□

Exemple 1.5.2. *1) On a déjà vu que la jauge d'un ensemble convexe est une semi-norme.*
2) Soit $\theta \in \mathbb{R}^n$. La fonction $p_\theta : x \mapsto p_\theta(x) = | < x, \theta > |$ est une semi-norme paire.

Théorème 1.5.3. *Si p est une semi-norme sur $\mathbb{R}^n$, alors l'ensemble*

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, p(x) \leq 1\}$$

est un convexe fermé contenant 0 dans son intérieur. Réciproquement, soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé contenant 0 dans son intérieur. Pour un tel convexe K, on définit sa jauge

$$p_K : x \mapsto p_K(x) = \inf\{\alpha > 0 \,;\, x \in \alpha K\}$$

alors p_K est une semi-norme et on a $K = \{p_K \leq 1\}$. Par ailleurs, cette jauge est paire si et seulement si K est symétrique, autrement dit si $K = -K$.

Démonstration. $\Longrightarrow$: Soient $x, y \in K$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors,

$$p((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)p(x) + \lambda p(y) \leq 1.$$

Donc, $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$, ainsi l'ensemble K est convexe. D'après la proposition 1.5.1, p est continue et puisque $K = p^{-1}(]-\infty, 1])$, alors K est fermé. Pour finir, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, p(x) < 1\}$ est ouvert, inclus dans K et contient 0. Donc, par définition de l'intérieur d'un ensemble, $0 \in \mathrm{int}(K)$.

$\Longleftarrow$: Déjà vu dans le théorème 1.2.34.

□

Définition 1.5.4 (Norme). *Une application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une norme si :*
1) $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Pour qu'une semi-norme soit une norme, il suffit donc qu'elle soit paire et qu'on ait $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. On cherche une caractérisation sur K pour obtenir cela.

Proposition 1.5.5. *Si l'ensemble K est un corps convexe symétrique, alors $0 \in \mathrm{int}(K)$.*

Démonstration. Soit K un tel ensemble, et soit x un élément de l'intérieur de K, qui existe bien puisque l'intérieur de K n'est pas vide. On suppose x différent de 0 sinon il n'y a rien à démontrer. Puisque x est dans l'intérieur de K, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset K$. Donc, $-\mathcal{B}(x,\varepsilon) \subset -K$. Par symétrie de K, $-K = K$, donc $-x \in \mathrm{int}(K)$. Par convexité de $\mathrm{int}(K)$, $0 \in \mathrm{int}(K)$.

□

Théorème 1.5.6. *Si K est un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$, alors sa jauge p_K est une norme sur $\mathbb{R}^n$, que l'on notera $\|.\|_K$, et on a*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x\|_K \leq 1\}.$$

Réciproquement, si $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors la boule unité

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x\| \leq 1\}$$

est un corps convexe symétrique.

Démonstration. La plupart du travail a été fait dans le théorème 1.5.3. Il reste à montrer que si $p_K(x) = 0$, alors $x = 0$ pour que p_K soit une norme. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $p_K(x_0) = 0$. Il existe donc une suite de réels (λ_n) qui tend vers 0 telle que pour tout n, $x_0 \in \lambda_n K$. Pour chaque n, on peut donc trouver $y_n \in K$ tel que $x_0 = \lambda_n y_n$. Comme K est compact, on peut extraire de la suite (y_n) une sous-suite convergente, ce qui aboutit bien à $x_0 = 0$.

□

En conclusion, si $(E, \|.\|_E)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie n qui a pour base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, en considérant l'isomorphisme $T : \mathbb{R}^n \to E$ qui à $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ on associe $T(a) = \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i$ et en définissant pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ la norme $\|a\| := \|T(a)\|_E = \|\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i\|_E$, alors T est une isométrie entre les espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ et $(E, \|.\|_E)$. Ainsi, tout espace vectoriel normé de dimension n est isométrique à un $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ pour une certaine norme $\|.\|$. Par conséquent, les espaces vectoriels normés de dimension finie n sont en correspondance avec les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$.

1.6 Dualité

Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, son dual, noté E^*, qui est par définition l'ensemble des formes linéaires continues sur E, est muni de la norme

$$\|\xi\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} |\xi(x)|.$$

La boule unité de $(E^*, \|.\|_*)$ est donc

$$\mathcal{B}_{E^*} = \{\xi \in E^* \,;\, \|\xi\|_* \leq 1\} = \{\xi \in E^* \,;\, |\xi(x)| \leq 1, \forall x \in \mathcal{B}_E\}.$$

Définition 1.6.1 (Normes ℓ_p^n). *Pour $p \geq 1$ et $n \geq 1$ désignant la dimension de l'espace, on définit la norme $\|.\|_{\ell_p^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par*

$$\|x\|_{\ell_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et on note $\ell_p^n = \left(\mathbb{R}^n, \|.\|_{\ell_p^n}\right)$. La boule unité de cet espace est noté $\mathcal{B}_p^n$. Autrement dit,

$$\mathcal{B}_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_{\ell_p^n} \leq 1\}.$$

Si $p = 2$, alors $\|x\|_{\ell_2^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui correspond à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.6.2 (Distance géométrique). *La distance géométrique $d_g(K, L)$ entre deux corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ est définie par*

$$d_g(K, L) = \inf\{c > 0 \,;\, \exists r > 0, rK \subset L \subset crK\}.$$

Autrement dit, il s'agit de la meilleure constante $c \geq 1$ pour laquelle on a, pour un certain $r > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$r\|x\|_K \leq \|x\|_L \leq cr\|x\|_K.$$

La distance géométrique n'est pas une distance au sens de la définition usuelle. Il faudrait prendre le log.

Lemme 1.6.3. *Soient K et L deux corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$K \subset L \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_L \leq \|x\|_K$$

où $\|x\|_K = \inf\{\alpha > 0\,;\, x \in \alpha K\}$.

Démonstration. $\underline{\Longleftarrow}$: Soit $x \in K$, alors $\|x\|_K \leq 1$. Donc, par hypothèse,

$$\|x\|_L \leq \|x\|_K \leq 1.$$

Ainsi, $x \in L$.
$\underline{\Longrightarrow}$: On suppose $K \subset L$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|_K} \in L$. Donc, $\left\|\frac{x}{\|x\|_K}\right\|_L \leq 1$. Ainsi, $\|x\|_L \leq \|x\|_K$.

□

Proposition 1.6.4. *Soient $1 \leq p \leq q$. La distance géométrique des boules unités des espaces ℓ_p^n et ℓ_q^n vérifie*

$$d_g(\mathcal{B}_p^n, \mathcal{B}_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. On suppose $q = +\infty$. Alors,

$$\|x\|_{\ell_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\left(\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{\ell_\infty^n}$$

et

$$\|x\|_{\ell_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n\left(\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\|x\|_{\ell_\infty^n}.$$

On suppose $q < +\infty$. Soit $x \in \mathcal{B}_p^n$. Alors, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $|x_i| \leq 1$. Donc, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $|x_i|^q \leq |x_i|^p$. Donc, $\sum_{i=1}^n |x_i|^q \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq 1$. Ainsi, $x \in \mathcal{B}_q^n$. Par conséquent, par le lemme 1.6.3, $\|x\|_{\ell_q^n} \leq \|x\|_{\ell_p^n}$. D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\|x\|_{\ell_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{i=1}^n 1\right)^{1-\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|x\|_{\ell_q^n}.$$

Par conséquent, pour tout $1 \leq p \leq q$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_{\ell_q^n} \leq \|x\|_{\ell_p^n} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|x\|_{\ell_q^n}.$$

Pour conclure, on remarque que si $x = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\|_{\ell_q^n} = \|x\|_{\ell_p^n}$ et que si $x = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\|_{\ell_p^n} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell_q^n}$. Finalement,

$$d_g(\mathcal{B}_p^n, \mathcal{B}_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

□

Corollaire 1.6.5. *Les ensembles $\mathcal{B}_{\log(n)}^n$ et $\mathcal{B}_\infty^n$ vérifient*

$$d_g(\mathcal{B}_{\log(n)}^n, \mathcal{B}_\infty^n) = \mathrm{e}$$

indépendamment de la dimension.

Démonstration. En prenant $p = \log(n)$ et $q = +\infty$ dans la proposition 1.6.4, alors

$$\|x\|_{\ell_\infty^n} \le \|x\|_{\ell_{\log(n)}^n} \le n^{\frac{1}{\log(n)}} \|x\|_{\ell_\infty^n} = \mathrm{e}\|x\|_{\ell_\infty^n}.$$

□

Définition 1.6.6 (Polaire d'un ensemble)**.** *Soit K un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On appelle le polaire de K, et on note K°, la boule unité du dual de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_K)$. Autrement dit,*

$$K^\circ = \mathcal{B}_{(\mathbb{R}^n, \|.\|_K)^*}.$$

Ainsi, $(\|.\|_K)_* = \|.\|_{K^\circ}$.

On sait que pour tous $1 \le p, q \le +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, le dual de ℓ_p^n est ℓ_q^n. Il s'ensuit que $(\mathcal{B}_p^n)^\circ = \mathcal{B}_q^n$. En particulier, $(\mathcal{B}_2^n)^\circ = \mathcal{B}_2^n$.

Proposition 1.6.7. *Soit K un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, < y, x > \le 1, \forall x \in K\}.$$

Démonstration. On sait qu'en dimension finie, toute forme linéaire continue est un produit scalaire. Ainsi,

$$\begin{aligned} K^\circ &= \mathcal{B}_{(\mathbb{R}^n, \|.\|_K)^*} \\ &= \{\xi \in (\mathbb{R}^n, \|.\|_K)^* \,;\, \|\xi\|_* \le 1\} \\ &= \{\xi \in (\mathbb{R}^n, \|.\|_K)^* \,;\, |\xi(x)| \le 1, \forall x \in \mathcal{B}_{(\mathbb{R}^n, \|.\|_K)} = K\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, |< y, x >| \le 1, \forall x \in K\}. \end{aligned}$$

□

Lorsque l'ensemble K n'est plus symétrique, la proposition 1.6.7 est une définition.

Proposition 1.6.8. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$| < x, y > | \leq \|x\|_K \|y\|_{K^\circ}.$$

Démonstration. Par définition, $\|y\|_{K^\circ} = \sup\{| < y, x > |, \|x\|_K \leq 1\}$. Donc,

$$| < x, y > | = \|x\|_K | < \frac{x}{\|x\|_K}, y > | \leq \|x\|_K \|y\|_{K^\circ}.$$

□

Proposition 1.6.9. *1) Soit $T \in GL(\mathbb{R}^n)$, alors $(T(K))^\circ = (T^*)^{-1}(K^\circ)$, où T^* désigne l'adjoint de T, définit comme ceci, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ par*

$$< T(x), y > = < x, T^*(y) > .$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda K)^\circ = \frac{1}{\lambda} K^\circ$.
2) Soient K et L deux corps convexes de $\mathbb{R}^n$ tels que $K \subset L$. Alors, $L^\circ \subset K^\circ$.

Démonstration. 1) A partir des hypothèses de l'énoncé, nous avons

$$\begin{aligned} (T(K))^\circ &= \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < x, y > \leq 1, \forall y \in T(K)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < x, T(k) > \leq 1, \forall k \in K\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < T^*(x), k > \leq 1, \forall k \in K\} \\ &= (T^*)^{-1}(K^\circ). \end{aligned}$$

2) Soit $y \in L^\circ$, alors pour tout $l \in L$, $< y, l > \leq 1$. Or, $K \subset L$, donc tout élément de K est dans L. Ainsi, pour tout $x \in K$, $< y, x > \leq 1$. Donc, $y \in K^\circ$.

□

Théorème 1.6.10. *Soit K un corps convexe contenant 0 dans son intérieur, alors K° est un corps convexe contenant 0 dans son intérieur. De plus, $(K^\circ)^\circ = K$.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in K^\circ$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, pour tout $y \in K$,

$$< (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, y > = (1-\lambda) < x_1, y > + \lambda < x_2, y > \leq (1-\lambda) + \lambda = 1.$$

Donc, K° est convexe. Par ailleurs, $K^\circ = f^{-1}(]-\infty; 1])$ où $f : x \mapsto < x, y >$. Donc, K° est fermé puisque l'ensemble $]-\infty; 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, f est continue.

Puisque $(\mathcal{B}_2^n)^\circ = \mathcal{B}_2^n$, on déduit de la proposition 1.6.9 que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{B}(0, \varepsilon)^\circ = \mathcal{B}(0, \frac{1}{\varepsilon})$. Puisque K est compact d'intérieur non vide, et contenant 0 dans son intérieur, il existe $\varepsilon, \rho > 0$ tels que $\mathcal{B}(0, \varepsilon) \subset K \subset \mathcal{B}(0, \rho)$. Donc, d'après la proposition 1.6.9, $\mathcal{B}(0, \frac{1}{\varepsilon})^\circ \subset K^\circ \subset \mathcal{B}(0, \frac{1}{\rho})^\circ$, ce qui implique que $0 \in \mathrm{int}(K^\circ)$ et que K° est borné et alors compact.

On montre maintenant que $(K^\circ)^\circ = K$.
$\supset$: Soit $y \in K$. Par définition, pour tout $x \in K^\circ$, on a $< x, y > \leq 1$, donc par symétrie du produit scalaire $y \in (K^\circ)^\circ$.

On remarque que jusqu'ici, nous n'avons pas utilisé ni la convexité de K, ni la fermeture de K.
$\subset$: On le montre par contraposée. Soit z n'appartenant pas à K. Puisque K est convexe et $\{z\}$ compact, alors d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $u \in \mathbb{R}$ tels que l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < x, u >= \alpha\}$ sépare strictement K et $\{z\}$ de telle sorte que $K \subset H^-$ et $\{z\} \subset H^+$, autrement dit $< z, u >> \alpha$ et pour tout $y \in K$, $< y, u > \leq \alpha$. Ainsi, $< y, \frac{u}{\alpha} > \leq 1$ et donc $\frac{u}{\alpha} \in K^\circ$. Cela nous dit que si $w \in \mathbb{R}^n$ vérifie $< w, \frac{u}{\alpha} >> 1$, alors w n'appartient pas à $(K^\circ)^\circ$. Ceci est vérifié en particulier par z, donc z n'est pas dans $(K^\circ)^\circ$. Ainsi, $(K^\circ)^\circ \subset K$.

□

La démonstration précédente montre aussi que si K est un convexe fermé et $0 \in K$, alors on a toujours $(K^\circ)^\circ = K$.

Proposition 1.6.11. *Soient K_1, K_2, deux corps convexes contenant tous les deux 0 dans leur intérieur. Alors,*
1) $(K_1 \cap K_2)^\circ = \operatorname{conv}(K_1^\circ \cup K_2^\circ)$
2) $(\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2))^\circ = K_1^\circ \cap K_2^\circ$

Démonstration. 1) $\supset$: Puisque $K_1 \cap K_2 \subset K_1$ et $K_1 \cap K_2 \subset K_2$, alors $K_1^\circ \subset (K_1 \cap K_2)^\circ$ et $K_2^\circ \subset (K_1 \cap K_2)^\circ$. Donc, $K_1^\circ \cup K_2^\circ \subset (K_1 \cap K_2)^\circ$, et puisque $(K_1 \cap K_2)^\circ$ est convexe, alors par définition de l'enveloppe convexe, on a $\operatorname{conv}(K_1^\circ \cup K_2^\circ) \subset (K_1 \cap K_2)^\circ$.
2) $\subset$: Puisque $K_1 \subset \operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)$ et $K_2 \subset \operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)$, alors $(\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2))^\circ \subset K_1^\circ$ et $(\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2))^\circ \subset K_2^\circ$, donc $(\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2))^\circ \subset K_1^\circ \cap K_2^\circ$.

On obtient les réciproques en remplaçant K_1 et K_2 par K_1° et K_2°, et en utilisant le fait que $(K^\circ)^\circ = K$ pour tout ensemble K vérifiant les hypothèses des ensembles K_1 et K_2. □

Proposition 1.6.12. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$(\mathrm{P}_{e_i^\perp}(K))^\circ = e_i^\perp \cap K^\circ.$$

Lorsque $K \subset e_i^\perp$, on définit le polaire de K dans l'espace $e_i^\perp$ muni du produit scalaire induit.

Démonstration. $\supset$: Soit $y \in e_i^\perp \cap K^\circ$. Par définition,

$$\mathrm{P}_{e_i^\perp}(K) = \{x \in e_i^\perp\,;\, \exists \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda e_i \in K\}.$$

Soit $x \in \mathrm{P}_{e_i^\perp}(K)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $k \in K$ tels que $x + \lambda e_i = k$. Donc,

$$< x, y >=< x, y > + < \lambda e_i, y >=< x + \lambda e_i, y >=< k, y > \leq 1$$

car $y \in K^\circ$. Donc, $y \in (\mathrm{P}_{e_i^\perp}(K))^\circ$. Par conséquent, $e_i^\perp \cap K^\circ \subset (\mathrm{P}_{e_i^\perp}(K))^\circ$.
$\subseteq$: Soit $y \in (\mathrm{P}_{e_i^\perp}(K))^\circ$. Alors, $y \in e_i^\perp$ et pour tout $x \in \mathrm{P}_{e_i^\perp}(K)$,

$$< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_{i-1}y_{i-1} + x_{i+1}y_{i+1} + \cdots + x_ny_n \leq 1.$$

Il reste à montrer que $y \in K^\circ$. Soit $x \in K$. On a $x = \mathrm{P}_{e_i^\perp}(x) + x_ie_i$. Puisque $y \in e_i^\perp$, alors $< x, y >=< \mathrm{P}_{e_i^\perp}(x), y >\leq 1$ car $\mathrm{P}_{e_i^\perp}(x) \in \mathrm{P}_{e_i^\perp}(K)$. Donc, $y \in K^\circ$.

□

Corollaire 1.6.13. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in K$. Alors,*

$$\mathrm{P}_{e_i^\perp}(K^\circ) = (e_i^\perp \cap K)^\circ.$$

1.7 La distance de Hausdorff

Il est possible de munir de plusieurs façons l'ensemble des corps convexes de $\mathbb{R}^n$ d'une distance « géométriquement raisonnable ». La distance de Hausdorff en est un exemple. La définition canonique de cette distance se fait pour des ensembles compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Nous traiterons donc cette distance dans cette classe d'ensemble plus générale que celle des corps convexes de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.7.1 (distance de Hausdorff)**.** *Pour K, L deux ensembles compacts non vides de $\mathbb{R}^n$, la distance de Hausdorff de K et L est définie par*

$$\delta(K, L) = \max\{\sup_{x\in K}\inf_{y\in L}|x-y|, \sup_{x\in L}\inf_{y\in K}|x-y|\}.$$

Puisque nous considérons des ensembles compacts, le supremum et l'infimum dans la définition de la distance de Hausdorff peuvent être remplacés par le maximum et le minimum.

Proposition 1.7.2. *1) Soient K, L deux ensembles compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. On a*

$$\delta(K, L) = \min\{\lambda \geq 0\,;\, K \subset L + \lambda\mathcal{B}_2^n, L \subset K + \lambda\mathcal{B}_2^n\}.$$

2) L'application δ est une distance.

Démonstration. 1) Notons $\alpha = \min\{\lambda \geq 0\,;\, K \subset L + \lambda\mathcal{B}_2^n, L \subset K + \lambda\mathcal{B}_2^n\}$. Pour $x \in K$, on a donc $x \in L + \alpha\mathcal{B}_2^n$. Ainsi, $x = y + \alpha b$, pour un $y \in L$ et un $b \in \mathcal{B}_2^n$. Donc, $|x - y| \leq \alpha$. Par conséquent, $\inf_{y\in L}|x - y| \leq \alpha$. En interchangeant K et L, on arrive au fait que $\delta(K, L) \leq \alpha$.

Soit maintenant $0 < \lambda < \alpha$ alors K n'est pas inclus dans $L + \lambda\mathcal{B}_2^n$. Alors, il existe $x \in K$ tel que $x \notin L + \lambda\mathcal{B}_2^n$. Donc, pour tout $y \in L$, $|x - y| \geq \lambda$.

Ce qui implique que $\delta(K,L) \geq \lambda$. Puisque λ est arbitraire et $\lambda < \alpha$, alors en faisant tendre λ vers α, $\delta(K,L) \geq \alpha$.

Finalement, $\delta(K,L) = \alpha$.

2) Soient K, L, M des ensembles compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Alors

i)

$$\delta(K,K) = \min\{\lambda \geq 0\,;\, K \subset K + \lambda\mathcal{B}_2^n, K \subset K + \lambda\mathcal{B}_2^n\} = 0.$$

ii)

$$\begin{aligned}\delta(K,L) &= \min\{\lambda \geq 0\,;\, K \subset L + \lambda\mathcal{B}_2^n, L \subset K + \lambda\mathcal{B}_2^n\} \\ &= \min\{\lambda \geq 0\,;\, L \subset K + \lambda\mathcal{B}_2^n, K \subset L + \lambda\mathcal{B}_2^n\} \\ &= \delta(L,K).\end{aligned}$$

iii) Montrons que $\delta(K,L) \leq \delta(K,M) + \delta(M,L)$. On pose $\alpha = \delta(K,L)$, $\beta = \delta(K,M)$, $\gamma = \delta(M,L)$. Alors, $K \subset M + \beta\mathcal{B}_2^n$, $M \subset K + \beta\mathcal{B}_2^n$, $M \subset L + \gamma\mathcal{B}_2^n$, $L \subset M + \gamma\mathcal{B}_2^n$. Ainsi,

$$K \subset L + \gamma\mathcal{B}_2^n + \beta\mathcal{B}_2^n = L + (\gamma + \beta)\mathcal{B}_2^n$$

par convexité de $\mathcal{B}_2^n$. De même, $L \subset K + (\beta + \gamma)\mathcal{B}_2^n$. Par conséquent, par définition de α, $\alpha \leq \beta + \gamma$.

$\square$

Notons $\mathcal{C}^n$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{K}^n$ l'ensemble des compacts convexes non vides de $\mathbb{R}^n$. On a les résultats suivants.

Lemme 1.7.3. *Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}^n$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $K_{i+1} \subset K_i$, alors la suite (K_i) converge au sens de la distance de Hausdorff vers $\cap_{i\geq 0} K_i$.*

Démonstration. On pose $K = \cap_{i\geq 0} K_i$. Alors, K est un compact comme intersection de compacts. Par ailleurs, c'est un exercice classique de montrer que K est non vide. Nous allons le faire. On procède par l'absurde en supposant que K est vide. Alors, relativement à K_0, $K_0 = K^c = \cup_{i\geq 1} K_i^c$. Or, K_0 est compact, donc il existe un nombre fini d'entiers $i_1, \ldots, i_m$ tels que $K_0 = K_{i_1}^c \cup \cdots \cup K_{i_m}^c$. Ainsi, $K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_m} = \emptyset$. Donc, l'un des K_i est vide. Ce qui est contradictoire car aucun ne l'est par hypothèse.

Puisque que pour tout i, $K \subset K_i$, alors pour tout i et pour tout $\varepsilon > 0$, $K \subset K_i + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$. Il reste à voir que

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall i \geq N)\, K_i \subset K + \varepsilon\mathcal{B}_2^n.$$

On procède par l'absurde, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (K_{i_k}) de (K_i) tels que K_{i_k} n'est pas inclus dans $K + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$. Posons $A_k = K_{i_k} \setminus \mathrm{int}(K + \varepsilon\mathcal{B}_2^n)$, alors (A_k) est une suite décroissante de compacts non vides et donc a une intersection $A = \cap_{k\geq 0} A_k$ non vide. Il est clair que $A \cap K = \emptyset$, mais d'autre part on a pour tout k, $A_k \subset K_{i_k}$, donc $A \subset K$, d'où la contradiction.

$\square$

Théorème 1.7.4. *L'espace métrique* $(\mathcal{C}^n, \delta)$ *est complet.*

Démonstration. Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(\mathcal{C}^n, \delta)$. On pose, pour $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \overline{\cup_{i\geq m} K_i}$. Alors, $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides. Soit $m \in \mathbb{N}$. La bornitude est une conséquence de la propriété de Cauchy, en effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$, $K_p \subset K_{n_0} + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$. Ainsi, $\cup_{p\geq n_0} K_p$ est borné. De plus, $\cup_{i=m}^{n_0} K_i$ est borné comme réunion finie d'ensembles bornés. Finalement, A_m est borné. Par définition, A_m est fermé. Il s'ensuit que A_m est compact. D'autre part, $K_m \subset A_m$, donc A_m n'est pas vide. Enfin, $A_{m+1} = \overline{\cup_{i\geq m+1} K_i} \subset \overline{\cup_{i\geq m} K_i} = A_m$. Donc la suite (A_m) est décroissante. On applique alors le lemme 1.7.3 à la suite (A_m) pour conclure que cette suite converge au sens de la distance de Hausdorff vers $\cap_{m\geq 1} A_m := A$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq n_0$, $A_i \subset A + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$, donc pour tout $i \geq n_0$, $K_i \subset A + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$. Puisque $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tous $i, j \geq n_1$, $K_j \subset K_i + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$. Ainsi, pour $i, m \geq n_1$, on a $\cup_{j=m}^{+\infty} K_j \subset K_i + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$ et donc $A_m \subset K_i + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$. Ce qui implique que $A \subset K_i + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$. On a prouvé que $\delta(K_i, A) \leq \varepsilon$ pour $i \geq n_1$. D'où le résultat.

□

Théorème 1.7.5. *Tout fermé borné de* $(\mathcal{C}^n, \delta)$ *est compact. En particulier, l'espace* $(\mathcal{C}^n, \delta)$ *est localement compact.*

Par un critère de compacité dans les espaces métriques, le théorème 1.7.5 est une conséquence du théorème suivant,

Théorème 1.7.6. *De toute suite bornée de* $\mathcal{C}^n$*, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(K_i^0)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}^n$ dont les éléments sont contenus dans un cube C de côté γ. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, le cube C peut s'écrire comme la réunion de 2^{mn} sous-cubes de côté $2^{-m}\gamma$. Pour $K \in \mathcal{C}^n$, on note $A_m(K)$ la réunion de tous les sous-cubes qui intersectent K pouvant s'écrire de la sorte. Puisque pour tout $m \in \mathbb{N}$, le nombre de sous-cubes est fini, la suite $(K_i^0)_{i\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite $(K_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $A_1(K_i^1) := T_1$ est indépendante de i. De manière identique, il existe une réunion T_2 de sous-cubes de côté $2^{-2}\gamma$ et une sous-suite $(K_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(K_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $A_2(K_i^2) = T_2$. Et ainsi de suite, pour obtenir une suite $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de réunion de sous-cubes (de côté $2^{-m}\gamma$ pour tout m) et pour chaque m, on obtient une suite $(K_i^m)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

$$A_m(K_i^m) = T_m \qquad (*).$$

$$(K_i^m)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est une sous-suite de } (K_i^k)_{i\in\mathbb{N}} \text{ pour } k < m \qquad (**).$$

Par $(*)$, nous avons $K_i^m \subset K_j^m + \lambda\mathcal{B}_2^n$ avec $\lambda = 2^{-m}\sqrt{n}\gamma$, ainsi $\delta(K_i^m, K_j^m) \leq 2^{-m}\sqrt{n}\gamma$ où $i, j, m \in \mathbb{N}$ et par $(**)$, $\delta(K_i^m, K_j^k) \leq 2^{-m}\sqrt{n}\gamma$ où $i, j \in \mathbb{N}$ et

$k \geq m$. Pour $K_m := K_m^m$, il s'ensuit que pour tout $k \geq m$, $\delta(K_m, K_k) \leq 2^{-m}\sqrt{n\gamma}$. Ainsi, $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc converge par le théorème 1.7.4. C'est la sous-suite qui prouve le théorème.

□

On se concentre maintenant sur l'ensemble $\mathcal{K}^n$ des ensembles compacts convexes non vides de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.7.7. *L'ensemble $\mathcal{K}^n$ est fermé dans $(\mathcal{C}^n, \delta)$.*

Démonstration. Soit $K \in \mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$. Alors, il existe $x, y \in K$ et des nombres $\lambda \in]0, 1[$, $\varepsilon > 0$ tels que $\mathcal{B}(z, \varepsilon) \cap K = \emptyset$, en posant $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Soit $K' \in \mathcal{C}^n$ vérifiant $\delta(K, K') < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors il existe des points $x', y' \in K'$ tels que $|x - x'| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|y - y'| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc le point $z' = (1 - \lambda)x' + \lambda y'$ vérifie $|z - z'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $z' \in K'$, alors il existe un point $w \in K$ tel que $|w - z'| < \frac{\varepsilon}{2}$, ainsi $|w - z| < \varepsilon$, d'où une contradiction. Ainsi, K' n'est pas convexe. Donc, $\mathcal{B}_\delta(K, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$. Nous avons prouvé que $\mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$ est ouvert.

□

Les théorèmes 1.7.6 et 1.7.7 entraînent le théorème suivant

Théorème 1.7.8 (Sélection de Blaschke). *Pour toute suite bornée d'éléments de $\mathcal{K}^n$, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de $\mathcal{K}^n$.*

Ayant introduit une distance sur l'ensemble $\mathcal{C}^n$, on s'intéresse alors à des résultats d'approximation. Ce qui est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.7.9. *Soit $K \in \mathcal{K}^n$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un polytope $P \in \mathcal{K}^n$ tel que $P \subset K \subset P + \varepsilon\mathcal{B}_2^n$. Par conséquent, $\delta(K, P) \leq \varepsilon$.*

Démonstration. Soit $K \in \mathcal{K}^n$ et $\varepsilon > 0$. On recouvre K par un nombre fini (K est compact) de boules de rayon ε et de centres appartenant à K et soit P l'enveloppe convexe des centres. Ainsi, P est un polytope vérifiant les propriétés nécessaires.

□

Autrement dit, l'ensemble des polytopes de $\mathbb{R}^n$ est dense dans l'ensemble des compacts convexes non vides de $\mathbb{R}^n$ pour la distance de Hausdorff.

Dans la preuve du théorème 1.7.9, si l'on suppose de plus que les centres des boules de rayon ε ont des coordonnées rationnelles, alors il s'ensuit que l'espace $(\mathcal{K}^n, \delta)$ est séparable, c'est-à-dire qu'il contient un ensemble dénombrable dense.

1.8 volumes mixtes

Le livre de [GAR] introduit rapidement la théorie de Brunn-Minkowski sans la détailler et parle plutôt de tomographie qui est une partie de la géométrie qui s'occupe de retrouver des informations d'un objet géométrique à partir de ses projections (on parle plutôt d'ombres) sur des sections hyperplanes. En pratique, cette géométrie est utilisée pour reconstruire l'image d'un patient à partir de rayons-X. Le mot « tomographie » provient du grec « tomos » qui signifie « couper ». Toutefois, pour une compréhension plus synthétique de cette partie sur les volumes mixtes, il peut être préférable de consulter ce livre avant celui de [SCH].

La théorie des volumes mixtes, qui a été crée par Minkowski, provient de la combinaison entre les deux importants concepts de volume et de somme de Minkowski. Voyons cela à l'aide d'un exemple.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère un parallélépipède rectangle K de longueur L, de largeur l et de hauteur h. On cherche à calculer pour $\varepsilon > 0$ fixé le volume de l'ensemble $K + \varepsilon\mathcal{B}_2^3$, communément appelé l'ensemble parallèle extérieur de K. On partitionne l'ensemble $K + \varepsilon\mathcal{B}_2^3$ de manière canonique en K lui-même, et 6 parallélépipèdes rectangles, et 12 quarts de cylindre, et 8 huitièmes de boule. L'ensemble des 6 parallélépipèdes rectangles est constitué de 2 parallélépipèdes rectangles de hauteur h, de longueur L et de largeur ε, de 2 parallélépipèdes rectangles de hauteur h, de longueur ε et de largeur l, de 2 parallélépipèdes rectangles de hauteur ε, de longueur L et de largeur l. L'ensemble des 12 quarts de cylindre est constitué de 4 quarts de cylindre de hauteur h et de rayon ε, de 4 quarts de cylindre de hauteur l et de rayon ε, de 4 quarts de cylindre de hauteur L et de rayon ε. Enfin, l'ensemble des huit huitièmes de boule est constitué de huit huitièmes de boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon ε. Il est conseillé de faire un dessin. Finalement,

$$|K + \varepsilon\mathcal{B}_2^3|_3 = |K|_3 + \varepsilon(2Lh + 2lh + 2Ll) + \varepsilon^2(\pi h + \pi l + \pi L) + \varepsilon^3(\frac{4}{3}\pi).$$

On remarque qu'il s'agit d'un polynôme de degré la dimension en la variable ε. Nous allons généraliser ce principe à l'aide du théorème de Minkowski.

Définition 1.8.1 (Volume mixte). *Soient $K_1, \ldots, K_m$ des ensembles convexes compacts de $\mathbb{R}^n$. On définit le volume mixte de $K_1, \ldots, K_m$ par*

$$V(K_1, \ldots, K_m) = \frac{1}{m!}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m+j}\sum_{i_1<\cdots<i_j}|K_{i_1} + \cdots + K_{i_j}|.$$

On note $V(K_1, i_1; \ldots; K_m, i_m)$ quand K_j apparaît i_j fois.

Théorème 1.8.2 (Minkowski sur les volumes mixtes). *Soient $K_1, \ldots, K_m$ des ensembles convexes compacts de $\mathbb{R}^n$. Alors le volume de la somme généralisée de Minkowski $K = t_1K_1 + \cdots + t_mK_m$ où $t_j \geq 0$, est un polynôme* *homogène de degré n en les variables t_j, dont les coefficients sont les volumes mixtes définis ci-dessus. Plus précisément,*

$$|K|_n = \sum_{j_1=1}^{m} \dots \sum_{j_n=1}^{m} V(K_{j_1}, \dots, K_{j_n}) t_{j_1} \dots t_{j_n}.$$

Ce théorème implique en outre que si on choisit $t_1 = 1$ et $t_j = 0$ pour $2 \leq j \leq n$ et en posant $K_1 = K$, alors

$$|t_1 K_1 + \dots + t_m K_m| = |K| = V(K, n).$$

En choisissant $t_1 = 1$ et $t_2 = \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} |K_1 + \varepsilon K_2| &= \sum_{j_1=1}^{2} \dots \sum_{j_n=1}^{2} V(K_{j_1}, \dots, K_{j_n}) t_{j_1} \dots t_{j_n} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} V(K_1, i; K_2, n-i) \varepsilon^{n-i} + nV(K_1, n-1; K_2)\varepsilon + V(K_1, n). \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{|K_1 + \varepsilon K_2| - |K_1|}{\varepsilon} = nV(K_1, n-1; K_2, 1) + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} V(K_1, i; K_2, n-i) \varepsilon^{n-i-1}.$$

Ainsi,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|K_1 + \varepsilon K_2| - |K_1|}{\varepsilon} = nV(K_1, n-1; K_2, 1).$$

Nous parlerons maintenant des quermassintegrals et des volumes intrinsèques.

Définition 1.8.3 (Quermassintegrals)**.** *Soit K un ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$, on définit pour tout $1 \leq i \leq n$ les quermassintegrals de K, notées $W_i(K)$, par*

$$W_i(K) = V(K, n-i; \mathcal{B}_2^n, i).$$

Définition 1.8.4 (Volumes intrinsèques)**.** *Soit K un ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$, les volumes intrinsèques de K, notées $V_i(K)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, sont définies par*

$$V_i(K) = \frac{1}{c_{n,i}} W_{n-i}(K) = \frac{1}{c_{n,i}} V(K, i; \mathcal{B}_2^n, n-i)$$

où $c_{n,i} = \frac{|\mathcal{B}_2^{n-i}|_{n-i}}{\binom{n}{i}}$.

Cette renotation est ingénieuse puisque,

$$V_n(K) = \frac{1}{c_{n,n}} W_0(K) = V(K, \dots, K) = |K|_n$$

et si K est un ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^k$, où $0 \leq i \leq k \leq n$, alors

$$V_i(K) = \frac{1}{c_{n,i}} V(K, i; \mathcal{B}_2^n, n-i) = \frac{1}{c_{k,i}} V(K, i; \mathcal{B}_2^k, k-i).$$

C'est particulièrement utile lorsque l'on travaille avec les projections. En posant $i = k$, on voit que $V_i(K) = |K|_i$ si $\dim(K) \leq i$.

En appliquant le théorème de Minkowski sur les volumes mixtes avec $K_1 = K$ un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et $K_2 = \mathcal{B}_2^n$, puis en utilisant les définitions ci-dessus, on obtient la formule, dite de Steiner

$$\begin{aligned} |K + \varepsilon \mathcal{B}_2^n| &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V(K, i; \mathcal{B}_2^n, n-i) \varepsilon^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_{n,i} V_i(K) \varepsilon^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{B}_2^{n-i}|_{n-i} V_i(K) \varepsilon^{n-i}. \end{aligned}$$

La théorie des volumes mixtes nous fournit en outre le résultat suivant,

Proposition 1.8.5. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|K + \varepsilon \mathcal{B}_2^n| - |K|}{\varepsilon} = |\mathrm{Fr}(K)|_{n-1}.$$

On finira cette section par un dernier exemple qui nous servira dans l'article de [BOB-NAZ1]. On cherche à calculer le volume de l'ensemble $K + \varepsilon[0,1]^n$, où K est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, on démontre le théorème de Minkowski dans le cas simple où $t_1 = 1, t_2 = \cdots = t_n = \varepsilon$, $K_1 = K$ et pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$, $K_j = [0, e_j]$.

Proposition 1.8.6. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$|K + \varepsilon[0, e_1] + \cdots + \varepsilon[0, e_n]|_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(K) \varepsilon^k$$

où $a_k(K) = \sum_{\mathrm{card}(\pi)=k} |K_\pi|_{n-k}$, $\pi \subset \{1, \dots, n\}$ et K_π désigne la projection de K sur le sous-espace affine $(n - \mathrm{card}(\pi))$-dimensionnel $\{x\,;\, x_j = 0, \forall j \in \pi\}$, avec la convention que $a_0 = |K|_n$ et que pour tout ensemble A de $\mathbb{R}^n$, $|A|_0 = 1$.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, K est un intervalle compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$|K + \varepsilon[0, e_1]|_1 = |K|_1 + \varepsilon.$$

La proposition est vérifiée pour $n = 1$.

Pour $n = 2$, K est un corps convexe de $\mathbb{R}^2$. On applique Fubini pour écrire que

$$|K + \varepsilon[0, e_1] + \varepsilon[0, e_2]|_2 = |K + \varepsilon[0, e_1]|_2 + \varepsilon|\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K + \varepsilon[0, e_1])|_1.$$

Encore une fois par Fubini,

$$|K + \varepsilon[0, e_1]|_2 = |K|_2 + \varepsilon|\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|_1.$$

Par linéarité de la projection et le fait que si un ensemble L est inclus dans $u^\perp$ alors $\mathrm{P}_{u^\perp}(L) = L$,

$$|\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K + \varepsilon[0, e_1])|_1 = |\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K) + \varepsilon\mathrm{P}_{e_2^\perp}([0, e_1])|_1 = |\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K)|_1 + \varepsilon$$

la dernière égalité venant du cas $n = 1$. Finalement,

$$|K + \varepsilon[0, e_1] + \varepsilon[0, e_2]|_2 = |K|_2 + \varepsilon(|\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|_1 + |\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K)|_1) + \varepsilon^2.$$

La proposition est vérifiée pour $n = 2$.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$. Soit alors K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
(*) &:= |K + \varepsilon[0, e_1] + \cdots + \varepsilon[0, e_n]|_n \\
&= |K + \cdots + \varepsilon[0, e_{n-1}]|_n + \varepsilon|\mathrm{P}_{e_n^\perp}(K + \cdots + \varepsilon[0, e_{n-1}])|_{n-1} \\
&= |K + \cdots + \varepsilon[0, e_{n-2}]|_n \\
&\qquad + \varepsilon\Big(|\mathrm{P}_{e_{n-1}^\perp}(K + \cdots + \varepsilon[0, e_{n-2}])|_{n-1} + |\mathrm{P}_{e_n^\perp}(K + \cdots + \varepsilon[0, e_{n-1}])|_{n-1}\Big) \\
&= |K|_n + \varepsilon\Big(|\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|_{n-1} + |\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K + \varepsilon[0, e_1])|_{n-1} \\
&\qquad\qquad + \cdots + |\mathrm{P}_{e_n^\perp}(K + \cdots + \varepsilon[0, e_{n-1}])|_{n-1}\Big).
\end{aligned}$$

Par linéarité de la projection et le fait que si un ensemble L est inclus dans $u^\perp$ alors $\mathrm{P}_{u^\perp}(L) = L$, on obtient

$$\begin{aligned}
(*) &= |K|_n + \varepsilon\Big(|\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|_{n-1} + |\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K) + \varepsilon[0, e_1]|_{n-1} \\
&\qquad\qquad + \cdots + |\mathrm{P}_{e_n^\perp}(K) + \cdots + \varepsilon[0, e_{n-1}]|_{n-1}\Big).
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}(*) &= |K|_n + \varepsilon \left(|\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|_{n-1} + \sum_{k=0}^{1} a_k^1(\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K))\varepsilon^k \right. \\ &\qquad \left. + \cdots + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{n-1}(\mathrm{P}_{e_n^\perp}(K))\varepsilon^k \right) \\ &= |K|_n \\ &\quad + \varepsilon \left(|\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|_{n-1} + a_0^1(\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K)) + \cdots + a_0^{n-1}(\mathrm{P}_{e_n^\perp}(K)) \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(a_1^1(\mathrm{P}_{e_2^\perp}(K)) + \cdots + a_1^{n-1}(\mathrm{P}_{e_n^\perp}(K)) \right) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \varepsilon^{n-1} \left(a_{n-2}^{n-2}(\mathrm{P}_{e_{n-1}^\perp}(K)) + a_{n-2}^{n-1}(\mathrm{P}_{e_n^\perp}(K)) \right) \\ &\quad + \varepsilon^n\end{aligned}$$

où $a_k^i(\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)) = \sum_{\mathrm{card}(\pi^i)=k} |(\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K))_{\pi^i}|_{n-1-k}$ et $\pi^i \subset \{1, \ldots, i\}$ tel que $j \notin \pi^i$ avec la convention que $a_0^i(\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)) = |\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)|_{n-1}$ et $a_{n-1}^i(\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)) = |(\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K))_{\pi^i}|_0 = 1$. Finalement,

$$|K + \varepsilon[0, e_1] + \cdots + \varepsilon[0, e_n]|_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(K)\varepsilon^k$$

où $a_k(K) = \sum_{\mathrm{card}(\pi)=k} |K_\pi|_{n-k}$, $\pi \subset \{1, \ldots, n\}$ avec la convention que $a_0(K) = |K|_n$ et $|K_\pi|_0 = 1$.

□

1.9 Inégalité de Brunn-Minkowski

Théorème 1.9.1 (Inégalité de Brunn-Minkowski)**.** *Soient A et B deux ensembles non vides compacts de $\mathbb{R}^n$. Alors,*

$$|A + B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

Pour la démonstration, nous nous référons à l'article [MIL-SCH].

Démonstration. Par approximation, on suppose que ces ensembles sont une réunion de parallélépipèdes rectangles, c'est-à-dire qu'ils sont une réunion de produits euclidien d'intervalles.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre total k de tels parallélépipèdes rectangles qui composent les ensembles A et B. Autrement dit,

$$\begin{aligned} k &= \text{nombre de parallélépipèdes rectangles de } A \\ &\qquad + \text{ nombre de parallélépipèdes rectangles de } B. \end{aligned}$$

Pour $k = 2$, alors A et B sont des parallélépipèdes rectangles de côté $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ respectivement. Donc,

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^{\frac{1}{n}}, \qquad |A|^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n} |a_i|^{\frac{1}{n}}, \qquad |B|^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n} |b_i|^{\frac{1}{n}}.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\begin{aligned} \frac{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}{|A+B|^{\frac{1}{n}}} &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{|a_i|}{|a_i|+|b_i|}\right)^{\frac{1}{n}} + \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{|b_i|}{|a_i|+|b_i|}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|}{|a_i|+|b_i|} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|b_i|}{|a_i|+|b_i|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

On suppose maintenant que $k > 2$ et que l'inégalité est vraie pour des ensembles A' et B' dont la somme des parallélépipèdes rectangles qui composent A' et B' est au plus $k-1$. Un des ensembles A ou B, disons A pour fixer les idées, est composé d'au moins deux parallélépipèdes rectangles. Puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translations, on suppose que l'ensemble A est placé de telle sorte que l'un des hyperplans de coordonnées partitionne A de telle sorte qu'au moins un des parallélépipèdes rectangles qui composent A se situe de part et d'autre de cet hyperplan. L'ensemble A est maintenant partitionné en deux ensembles A' et A'' qui sont réunions disjointes d'un nombre fini de parallélépipèdes rectangles et le nombre de parallélépipèdes rectangles dans A' ou A'' est inférieur ou égal au nombre de parallélépipèdes rectangles qui composent A. Maintenant, on translate l'ensemble B de telle manière que le même hyperplan partitionne B en deux ensembles B' et B'' tels que

$$\frac{|B'|}{|B|} = \frac{|A'|}{|A|} = \lambda.$$

Les ensembles B' et B'' ont un nombre de parallélépipèdes rectangles inférieur ou égal à celui de B. En résumé, $A = A' \cup A''$ où la réunion est disjointe et $B = B' \cup B''$ où la réunion est disjointe. Donc, $|A| = |A'| + |A''|$ et $|B| = |B'| + |B''|$. Par conséquent,

$$1 - \lambda = \frac{|B''|}{|B|} = \frac{|A''|}{|A|}.$$

D'autre part, il est évident que $(A'+B')\cup(A''+B'')\subset A+B$. Finalement, en utilisant en plus l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
|A+B| &\geq |A'+B'|+|A''+B''| \\
&\geq \left(|A'|^{\frac{1}{n}}+|B'|^{\frac{1}{n}}\right)^n+\left(|A''|^{\frac{1}{n}}+|B''|^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \left(\left(\frac{|A'|}{|A|}\right)^{\frac{1}{n}}|A|^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{|B'|}{|B|}\right)^{\frac{1}{n}}|B|^{\frac{1}{n}}\right)^n+\left(\left(\frac{|A''|}{|A|}\right)^{\frac{1}{n}}|A|^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{|B''|}{|B|}\right)^{\frac{1}{n}}|B|^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \lambda\left(|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}\right)^n+(1-\lambda)\left(|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \left(|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}\right)^n.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|A+B|^{\frac{1}{n}}\geq |A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}.$$

□

Corollaire 1.9.2. *Soient $\lambda\in[0,1]$ et $A,B\subset\mathbb{R}^n$ non vides mesurables. Alors,*

$$|(1-\lambda)A+\lambda B|\geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}.$$

Démonstration. A partir des hypothèses de l'énoncé, on applique le théorème 1.9.1 puis l'inégalité arithmético-géométrique,

$$|(1-\lambda)A+\lambda B|^{\frac{1}{n}}\geq |(1-\lambda)A|^{\frac{1}{n}}+|\lambda B|^{\frac{1}{n}}=(1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}}+\lambda|B|^{\frac{1}{n}}\geq |A|^{\frac{1-\lambda}{n}}|B|^{\frac{\lambda}{n}}.$$

Ainsi,

$$|(1-\lambda)A+\lambda B|\geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}.$$

□

Par conséquent, $|.|$ est log-concave et même $\frac{1}{n}$-concave. Plus généralement,

Proposition 1.9.3. *Toute fonction $\frac{1}{n}$-concave est* log*-concave.*

Démonstration. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ une fonction $\frac{1}{n}$-concave et soient $x,y\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in[0,1]$. Alors, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique,

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)^{\frac{1}{n}}\geq(1-\lambda)f(x)^{\frac{1}{n}}+\lambda f(y)^{\frac{1}{n}}\geq f(x)^{\frac{1-\lambda}{n}}f(y)^{\frac{1-\lambda}{n}}.$$

Ainsi,

$$f((1-\lambda)x+\lambda y)\geq(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$

Par conséquent, f est log-concave.

□

En fait, le théorème 1.9.1 et le corollaire 1.9.2 sont équivalents. En effet, on retrouve le théorème 1.9.1 en appliquant le corollaire 1.9.2 aux ensembles

$$\frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}}$$

qui ont pour volume 1. Puis on choisit pour λ,

$$\lambda = \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}, \qquad 1 - \lambda = \frac{|A|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left| \frac{|A|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}} + \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}} \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}} \right| &= \frac{|A+B|}{\left(|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}\right)^n} \\ &\geq \left| \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}} \right|^{1-\lambda} \left| \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}} \right|^{\lambda} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

Corollaire 1.9.4 (Inégalité isopérimétrique)**.** *Parmi les ensembles compacts d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ de même volume, la boule euclidienne a la mesure de surface la plus petite. Autrement dit, soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ tel que $|K| = |\mathcal{B}_2^n|$, alors*

$$|\mathrm{Fr}(K)|_{n-1} \geq |\mathrm{Fr}(\mathcal{B}_2^n)|_{n-1}.$$

Démonstration. D'après la proposition 1.8.5,

$$|\mathrm{Fr}(K)|_{n-1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|K + \varepsilon \mathcal{B}_2^n| - |K|}{\varepsilon}.$$

Or, d'après l'inégalité de Brunn-Minkowski,

$$\begin{aligned} \frac{|K + \varepsilon \mathcal{B}_2^n| - |K|}{\varepsilon} &\geq \frac{\left(|K|^{\frac{1}{n}} + \varepsilon |\mathcal{B}_2^n|^{\frac{1}{n}}\right)^n - |K|}{\varepsilon} \\ &\geq \frac{|K| + n\varepsilon |K|^{\frac{n-1}{n}} |\mathcal{B}_2^n|^{\frac{1}{n}} - |K|}{\varepsilon} \\ &= n|\mathcal{B}_2^n| \\ &= |\mathrm{Fr}(\mathcal{B}_2^n)|_{n-1}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est discutée dans les annexes lors du calcul du volume de la boule $\mathcal{B}_2^n$.

$\square$

Corollaire 1.9.5 (Théorème de Brunn). *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ une direction. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par*

$$t \mapsto f(t) = |\{x \in K\,;\, < x, \theta >= t\}|_{n-1}.$$

Alors, la fonction f est $\frac{1}{n-1}$-concave sur son support.

Démonstration. Soit l'ensemble $K(t) = \{x \in K\,;\, < x, \theta >= t\}$ et soient $t, s \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Si $x \in (1-\lambda)K(t) + \lambda K(s)$, alors $x \in K$ car K est convexe et il existe $a \in K(t)$ et $b \in K(s)$ tels que $x = (1-\lambda)a + \lambda b$. Donc,

$$< x, \theta >=< (1-\lambda)a + \lambda b, \theta >= (1-\lambda) < a, \theta > +\lambda < b, \theta >= (1-\lambda)t + \lambda s.$$

Donc, $x \in K((1-\lambda)t + \lambda s)$. Par conséquent, pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$(1-\lambda)K(t) + \lambda K(s) \subset K((1-\lambda)t + \lambda s).$$

On applique alors l'inégalité de Brunn-Minkowski,

$$|(1-\lambda)K(t) + \lambda K(s)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \geq (1-\lambda)|K(t)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} + \lambda |K(s)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)t + \lambda s)^{\frac{1}{n-1}} &= |K((1-\lambda)t + \lambda s)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \\ &\geq (1-\lambda)|K(t)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} + \lambda |K(s)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \\ &= (1-\lambda) f(t)^{\frac{1}{n-1}} + \lambda f(s)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

□

Il s'ensuit que la fonction f est également log-concave d'après la proposition 1.9.3.

Corollaire 1.9.6. *Si l'ensemble K est symétrique, alors $\|f\|_\infty = f(0)$.*

Démonstration. Puisque K est symétrique alors $f(t) = f(-t)$. Puisque f est log-concave, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(t)f(-t)} \leq f(0)$. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) \leq f(0).$$

□

Nous présentons maintenant une forme fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Théorème 1.9.7 (Inégalité de Prékopa-Leindler)**.** *Soient* $\lambda \in [0,1]$ *et soient* $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *telles que pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^n$*,*

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

alors,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\lambda}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, nous présentons deux démonstrations. L'une est géométrique et l'autre est analytique. Nous commençons par la démonstration géométrique. On commence par démontrer l'inégalité de Brunn-Minkowski en dimension 1. Soient A et B deux ensembles non vides de $\mathbb{R}$. Puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on peut translater les ensembles A et B comme on veut. On suppose alors que $\sup(A) = 0$ et $\inf(B) = 0$. Par conséquent, $A \cup B \subset A + B$. Ainsi,

$$|A + B| \geq |A \cup B| = |A| + |B|.$$

On démontre maintenant l'inégalité de Prékopa-Leindler en dimension 1. Soient f, g, h trois fonctions positives telles que f et g soient bornées. Par homogénéité, on suppose que $\sup(f) = \sup(g) = 1$. Par Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |\{f \geq t\}|_1\,\mathrm{d}t$$

et de même pour g. Si $f(x) \geq t$ et $g(y) \geq t$, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, $h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq t$ car par hypothèse $h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$. On a donc l'inclusion

$$\{h \geq t\} \supset (1-\lambda)\{f \geq t\} + \lambda\{g \geq t\}.$$

On applique l'inégalité de Brunn-Minkowski en dimension 1,

$$|\{h \geq t\}| \geq (1-\lambda)|\{f \geq t\}| + \lambda|\{g \geq t\}|.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient

$$\int h \geq (1-\lambda)\int f + \lambda \int g \geq \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^{\lambda}$$

la dernière inégalité étant obtenue en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique.

Pour la démonstration analytique, on suppose que les fonctions f, g sont continues à support compact et vérifient $\int f = \int g = 1$. On considère les fonctions $x, y : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies pour tout $t \in [0,1]$ par

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f(u)\,\mathrm{d}u = t \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{y(t)} g(u)\,\mathrm{d}u = t.$$

En dérivant, on obtient que $f(x(t))x'(t) = g(y(t))y'(t) = 1$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(z)\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 h((1-\lambda)x(t)+\lambda y(t))((1-\lambda)x'(t)+\lambda y'(t))\,\mathrm{d}t \\ &\geq \int_0^1 f(x(t))^{1-\lambda} g(y(t))^{\lambda} x'(t)^{1-\lambda} y'(t)^{\lambda}\,\mathrm{d}t \\ &= 1.\end{aligned}$$

On suppose maintenant la propriété vraie en dimension n. Soient f, g, h trois fonctions positives définies sur $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ et tout $\lambda \in [0,1]$, $h((1-\lambda)x+\lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda}$. On écrit les vecteurs x de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forme $(x_1, \overline{x})$ où $x_1 \in \mathbb{R}$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Pour tous $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ et tous $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$h((1-\lambda)x_1+\lambda y_1, (1-\lambda)\overline{x}+\lambda\overline{y}) \geq f(x_1,\overline{x})^{1-\lambda} g(y_1,\overline{y})^{\lambda}.$$

Donc, en appliquant l'inégalité de Prékopa-Leindler en dimension n, on obtient

$$H((1-\lambda)x_1+\lambda y_1) \geq F(x_1)^{1-\lambda} G(y_1)^{\lambda}$$

où l'on a posé pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t,\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x} \qquad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x} \qquad G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t,\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x}.$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tous $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, on conclut en appliquant à nouveau l'inégalité de Prékopa-Leindler en dimension 1 et en utilisant Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} h = \int_{\mathbb{R}} H$$

et idem pour f et g.

□

On remarque qu'en prenant $f = \mathbf{1}_A$, $g = \mathbf{1}_B$ et $h = \mathbf{1}_{(1-\lambda)A+\lambda B}$, on retrouve l'inégalité de Brunn-Minkowski sous sa forme multiplicative, c'est-à-dire qu'on obtient

$$|(1-\lambda)A+\lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}.$$

Ainsi, l'inégalité de Prékopa-Leindler est une forme fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Définition 1.9.8 (Mesure à densité log-concave)**.** *On dit qu'une mesure μ sur $\mathbb{R}^n$ est à densité log-concave si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et si $\mathrm{d}\mu(x) = p(x)\mathrm{d}x$ où p est une densité log-concave.*

Exemple 1.9.9. *a) La mesure gaussienne standard que l'on note γ_n, qui est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ donnée par*

$$\mathrm{d}\gamma_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

b) La mesure de Lebesgue.
c) La restriction de la mesure de Lebesgue λ_K à un ensemble convexe K de $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda_K(A) = |K \cap A|$$

pour tout ensemble A de $\mathbb{R}^n$ mesurable.

D'après la propriété 1.4.14, ces exemples conviennent.

Plus généralement, si μ est une mesure à densité log-concave, alors sa restriction μ_K à un ensemble convexe est encore une mesure à densité log-concave. En effet, $\mathrm{d}\mu_K(x) = \mathbf{1}_K(x)p(x)\mathrm{d}x$ et $\mathbf{1}_K(x)p(x)$ est une fonction log-concave comme produit de deux fonctions log-concaves.

Si la fonction ϕ est log-concave sur $\mathbb{R}^n$ et si les fonctions f, g, h vérifient les hypothèses de l'inégalité de Prékopa-Leindler, alors il en va de même pour $f\phi, g\phi, h\phi$. En effet,

$$\begin{aligned}(h\phi)((1-\lambda)x + \lambda y) &= h((1-\lambda)x + \lambda y)\phi((1-\lambda)x + \lambda y) \\ &\geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \phi(x)^{1-\lambda} \phi(y)^{\lambda} \\ &= (f\phi)(x)^{1-\lambda} (g\phi)(y)^{\lambda}.\end{aligned}$$

Le théorème de Prékopa-Leindler s'améliore donc

Théorème 1.9.10. *On suppose que μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ à densité log-concave. Soient $\lambda \in [0,1]$ et f, g, h trois fonctions μ-intégrables vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\lambda}.$$

En particulier, on a pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tous ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^{\lambda}.$$

Définition 1.9.11 (Mesure log-concave)**.** *Une mesure μ vérifiant pour tout $\lambda \in [0,1]$, tous ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^n$*

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^{\lambda}$$

est dite log-concave.

Le théorème précédent montre qu'une mesure à densité log-concave est log-concave. La réciproque est également vraie comme on peut le voir dans [BOR2]. Ainsi, nous ne distinguerons pas mesure log-concave et mesure à densité log-concave (au moins si la mesure admet une densité).

Proposition 1.9.12 (Inégalité d'Anderson). *Soit μ une mesure à densité log-concave paire sur $\mathbb{R}^n$ et $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe symétrique. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\mu(C) \geq \mu(C + x).$$

Démonstration. Puisque l'ensemble C est convexe, alors $\frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C$ et puisque C est symétrique et μ est paire, alors

$$\mu(C - x) = \mu(-C + x) = \mu(C + x).$$

Ainsi,

$$\mu(C) = \mu\left(\frac{C+x}{2} + \frac{C-x}{2}\right) \geq \sqrt{\mu(C+x)\mu(C-x)} = \mu(C+x).$$

□

Théorème 1.9.13 (Prékopa). *Soit $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ une fonction log-concave. Alors, la fonction $x \mapsto \int u(x, y)\,\mathrm{d}y$ est log-concave.*

Démonstration. Soient x_1, x_2 et $\lambda \in [0, 1]$. On pose $f(y) = u(x_1, y)$, $g(y) = u(x_2, y)$ et $h(y) = u((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, y)$. Puisque u est log-concave, alors h vérifie pour tous y_1, y_2,

$$\begin{aligned} h((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) &= u((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \\ &\geq u(x_1, y_1)^{1-\lambda} u(x_2, y_2)^{\lambda} \\ &= f(y_1)^{1-\lambda} g(y_2)^{\lambda}. \end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité de Prékopa-Leindler (cf. théorème 1.9.7),

$$\begin{aligned} \int u((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, y)\,\mathrm{d}y &= \int h(y)\,\mathrm{d}y \\ &\geq \left(\int f(y)\,\mathrm{d}y\right)^{1-\lambda} \left(\int g(y)\,\mathrm{d}y\right)^{\lambda} \\ &= \left(\int u(x_1, y)\,\mathrm{d}y\right)^{1-\lambda} \left(\int u(x_2, y)\,\mathrm{d}y\right)^{\lambda} \end{aligned}$$

□

Conséquence 1.9.14. *1) On retrouve l'inégalité de Brunn-Minkowski pour les ensembles convexes.*
2) La convolée de deux fonctions log-concaves est log-concave.

Chapitre 2

corps convexes en position isotrope

Ce chapitre est pleinement inspiré de [GIA].

2.1 Existence et unicité de la position isotrope

Définition 2.1.1 (Position isotrope). *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$. On dit que K est en position isotrope si*
1) Pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\int_K < x, \theta > \, \mathrm{d}x = 0.$$

2) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_K < x, y >^2 \, \mathrm{d}x = \alpha^2 |y|^2.$$

La propriété 1) nous dit que le centre de gravité de K est l'origine et c'est même une équivalence puisque si le centre de gravité de K est à l'origine, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\int_K x_i \, \mathrm{d}x = 0$$

et donc pour tout $\theta \in \mathcal{S}^{n-1}$,

$$\int_K < x, \theta > \, \mathrm{d}x = \int_K (x_1\theta_1 + \cdots + x_n\theta_n) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \theta_i \int_K x_i \, \mathrm{d}x = 0.$$

Parfois, dans la définition de la position isotrope, on rajoute l'hypothèse que $|K| = 1$.

Proposition 2.1.2. *On a équivalence entre*
a) Il existe une constance $\alpha > 0$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_K < x, y >^2 \, \mathrm{d}x = \alpha^2 |y|^2.$$

b) Il existe une constance $\alpha > 0$ telle que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\int_K x_i x_j \, \mathrm{d}x = \alpha^2 \delta_{ij}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.
c) Il existe une constance $\alpha > 0$ telle que pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K < x, T(x) > \, \mathrm{d}x = \alpha^2 \mathrm{tr}(T)$$

où l'on note tr *la trace de T.*
d) Il existe une constance $\alpha > 0$ telle que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_K < x, u >< x, v > \, \mathrm{d}x = \alpha^2 < u, v > .$$

Démonstration. *a)* $\Longleftrightarrow$ *b)* : $\underline{\Longrightarrow}$: Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$. En prenant $y = e_i$, alors

$$\int_K < x, y >^2 \, \mathrm{d}x = \int_K x_i^2 \, \mathrm{d}x = \alpha^2.$$

En prenant $y = e_i + e_j$, alors

$$2\alpha^2 = \int_K < x, y >^2 \, \mathrm{d}x = \int_K (x_i + x_j)^2 \, \mathrm{d}x = 2\alpha^2 + 2 \int_K x_i x_j \, \mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\int_K x_i x_j \, \mathrm{d}x = 0.$$

Finalement, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\int_K x_i x_j \, \mathrm{d}x = \alpha^2 \delta_{ij}.$$

$\underline{\Longleftarrow}$: Soit $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_K < x, y >^2 \, \mathrm{d}x = \int_K (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n y_i^2 \int_K x_i^2 \, \mathrm{d}x = \alpha^2 |y|^2.$$

$b) \iff c)$: $\underline{\Longrightarrow}$: On écrit

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & t_{n,2} & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

et $x = (x_1, \dots, x_n)$. Alors,

$$T(x) = \begin{pmatrix} x_1 t_{1,1} + x_2 t_{1,2} + \dots + x_n t_{1,n} \\ x_1 t_{2,1} + x_2 t_{2,2} + \dots + x_n t_{2,n} \\ \vdots \\ x_1 t_{n,1} + x_2 t_{n,2} + \dots + x_n t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} < x, T(x) > \quad = \quad & x_1^2 t_{1,1} + x_1(x_2 t_{1,2} + \dots + x_n t_{1,n}) \\ & + \dots \\ & + x_n^2 t_{n,n} + x_n(x_1 t_{n,1} + \dots + x_{n-1} t_{n,n-1}). \end{aligned}$$

Or, par hypothèses, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\int_K x_i x_j \,\mathrm{d}x = \alpha^2 \delta_{ij}.$$

Donc,

$$\int_K < x, T(x) > \,\mathrm{d}x = t_{1,1} \int_K x_1^2 \,\mathrm{d}x + \dots + t_{n,n} \int_K x_n^2 \,\mathrm{d}x = \alpha^2 \mathrm{tr}(T).$$

$\underline{\Longleftarrow}$: Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. On choisit T telle que $t_{i,i} = 1$ et 0 ailleurs. Alors, puisque $\mathrm{tr}(T) = 1$,

$$\int_K < x, T(x) > \,\mathrm{d}x = \int_K x_i^2 = \alpha^2.$$

Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. On choisit T telle que $t_{i,i} = t_{j,j} = t_{i,j} = t_{j,i} = 1$ et 0 ailleurs. Alors, puisque $\mathrm{tr}(T) = 2$,

$$\int_K < x, T(x) > \,\mathrm{d}x = \int_K (x_i^2 + x_j^2 + 2x_i x_j) \,\mathrm{d}x = 2\alpha^2 + 2 \int_K x_i x_j \,\mathrm{d}x = 2\alpha^2.$$

Ainsi,

$$\int_K x_i x_j \,\mathrm{d}x = 0.$$

Finalement, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\int_K x_i x_j \,\mathrm{d}x = \alpha^2 \delta_{ij}.$$

<u>$d) \Longrightarrow a)$:</u> Si l'on prend $u = v = y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\int_K < x, y >^2 \, \mathrm{d}x = \alpha^2 < y, y >= \alpha^2 |y|^2.$$

<u>$b) \Longrightarrow d)$:</u> On développe

$$\begin{aligned}\int_K < x, u >< x, v > \, \mathrm{d}x &= \int_K (x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n)(x_1 v_1 + \ldots x_n v_n) \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n u_i v_i \int_K x_i^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 < u, v > .\end{aligned}$$

□

Le propriété b) de la proposition 2.1.2 nous dit que si K est en position isotrope, alors

$$\int_K |x|^2 \, \mathrm{d}x = \int_K x_1^2 + \cdots + x_n^2 \, \mathrm{d}x = n\alpha^2.$$

Proposition 2.1.3. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ en position isotrope. Soit $U \in \mathcal{O}(n)$. Alors, l'ensemble $U(K)$ est en position isotrope.*

Démonstration. On note U^* l'adjoint de U qui est défini pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ par

$$< U(x), y >=< x, U^*(y) > .$$

Puisque $U \in \mathcal{O}(n)$, alors $U^* = U^{-1}$. Il s'ensuit que

$$\int_{U(K)} < x, y >^2 \mathrm{d}x = \int_K < U(z), y >^2 \mathrm{d}z = \int_K < z, U^{-1}(y) > \mathrm{d}z = \alpha^2 |U^{-1}(y)|^2 = \alpha^2 |y|^2.$$

De plus, soit $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, alors

$$\int_{U(K)} < x, \theta > \, \mathrm{d}x = \int_K < U(z), \theta > \, \mathrm{d}z = \int_K < z, U^{-1}(\theta) > \, \mathrm{d}z = 0$$

car $U^{-1}(\theta) \in \mathbb{S}^{n-1}$.

□

Théorème 2.1.4. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de centre de gravité l'origine. Alors, il existe $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ telle que $T(K)$ est en position isotrope.*

Démonstration. On considère l'opérateur $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$y \mapsto M(y) = \int_K < x, y > x \, \mathrm{d}x.$$

Alors, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

$$< M(y), z > = < \left(\int_K < x, y > x \, \mathrm{d}x \right), z > = \int_K < x, y > < x, z > \, \mathrm{d}x = < y, M(z) > .$$

Donc, M est symétrique. Par ailleurs, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$< M(y), y > = \int_K < x, y >^2 \, \mathrm{d}x.$$

Donc, M est positive. De plus, si $< M(y), y > = 0$ alors pour tout $x \in K$, $< x, y > = 0$. Par hypothèse, K a son centre de gravité à l'origine donc il existe $C > 0$ tel que $\frac{y}{C} \in K$. En choisissant $x = \frac{y}{C}$, on obtient $|y|^2 = 0$ et donc $y = 0$. Finalement, M est symétrique et définie positive. Il s'ensuit que M possède une racine carrée S qui est symétrique et définie positive. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{S^{-1}(K)} < x, y >^2 \, \mathrm{d}x &= |\det(S)|^{-1} \int_K < S^{-1}(x), y >^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |\det(S)|^{-1} \int_K < x, S^{-1}(y) >^2 \, \mathrm{d}x \\
&= |\det(S)|^{-1} < \int_K < x, S^{-1}(y) > x \, \mathrm{d}x, S^{-1}(y) > \\
&= |\det(S)|^{-1} < M(S^{-1}(y)), S^{-1}(y) > \\
&= |\det(S)|^{-1} < S^{-1}(S^2(S^{-1}(y))), y > \\
&= |\det(S)|^{-1} |y|^2.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.1.5. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1 et de centre de gravité l'origine. On définit*

$$B(K) = \inf \left\{ \int_{T(K)} |x|^2 \, \mathrm{d}x \, ; \, T \in SL(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Alors, $T_1(K)$, où $T_1 \in SL(\mathbb{R}^n)$, est en position isotrope si et seulement si

$$\int_{T_1(K)} |x|^2 \, \mathrm{d}x = B(K).$$

De plus, soient $T_1, T_2 \in SL(\mathbb{R}^n)$ telles que $T_1(K)$ et $T_2(K)$ soient en position isotrope, alors il existe $U \in \mathcal{O}(n)$ telle que $U(T_1(K)) = T_2(K)$.

Démonstration. Soit $T_1 \in SL(\mathbb{R}^n)$ telle que $T_1(K)$ soit en position isotrope. Alors, d'après la proposition 2.1.2, pour tout $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{T_1(K)} < x, T(x) > \, \mathrm{d}x = \alpha^2 \mathrm{tr}(T).$$

Pour tout $T \in SL(\mathbb{R}^n)$, $T^* \circ T$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $< T^* \circ T(y), y >= \|T(y)\|^2 \geq 0$. Donc, $T^* \circ T$ est positive. Ainsi, en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $T^* \circ T$, qui sont positives, et en appliquant l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\begin{aligned}
\int_{T(T_1(K))} |x|^2 \mathrm{d}x &= \int_{T_1(K)} |T(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{T_1(K)} <x, T^*(T(x))> \mathrm{d}x \\
&= \alpha^2 \mathrm{tr}(T^* \circ T) \\
&= \alpha^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\
&\geq \alpha^2 n \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \alpha^2 n \left(\det(T^* \circ T) \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \alpha^2 n.
\end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $T_1(K)$ est en position isotrope, alors

$$\int_{T_1(K)} |x|^2 \mathrm{d}x = \alpha^2 n$$

et donc, sachant que $SL(\mathbb{R}^n) = SL(\mathbb{R}^n) \circ T_1$, $T_1(K)$ vérifie

$$\int_{T_1(K)} |x|^2 \, \mathrm{d}x = B(K).$$

Il s'ensuit, à l'aide du théorème 2.1.4, que l'infimum dans la définition de $B(K)$ est un minimum.

Réciproquement, on suppose qu'il existe $T_2 \in SL(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\int_{T_2(K)} |x|^2 \mathrm{d}x = B(K).$$

On sait, toujours d'après le théorème 2.1.4, qu'il existe $T_1 \in SL(\mathbb{R}^n)$ telle que $T_1(K)$ soit en position isotrope. Or, il existe $T \in SL(\mathbb{R}^n)$ telle $T \circ T_1 = T_2$. D'après ce qui précède, on a l'égalité

$$\int_{T_1(K)} |x|^2 \mathrm{d}x = \int_{T_2(K)} |x|^2 \mathrm{d}x = \int_{T(T_1(K))} |x|^2 \mathrm{d}x$$

et d'après le cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, les valeurs propres de $T^* \circ T$ sont toutes égales à un certain $\lambda > 0$. D'où, $T^* \circ T = \lambda Id$. Mais, $T \in SL(\mathbb{R}^n)$, donc $\lambda = 1$. Ainsi, $T^* \circ T = Id$. Par conséquent, $T \in$

$\mathcal{O}(n)$. On a donc $T_2(K) = T(T_1(K))$, ainsi d'après la proposition 2.1.3, $T_2(K)$ est en position isotrope.

On vient également de voir que si $T_1, T_2 \in SL(\mathbb{R}^n)$ telles que $T_1(K)$ et $T_2(K)$ soient en position isotrope, alors il existe $U \in \mathcal{O}(n)$ telle que $U(T_1(K)) = T_2(K)$. D'où l'unicité à une transformation orthogonale près.

□

2.2 La constante d'isotropie

Ce que nous avons vu jusqu'ici permet de montrer que pour tout corps convexe K de $\mathbb{R}^n$ de centre de gravité l'origine, la constante

$$L_K^2 = \frac{1}{n} \min \left\{ \frac{1}{|T(K)|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{T(K)} |x|^2 \, \mathrm{d}x \, ; \, T \in GL(\mathbb{R}^n) \right\}$$

est bien définie et ne dépend que de la classe linéaire de K. De plus, si K est en position isotrope, alors pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\int_K < x, \theta >^2 \, \mathrm{d}x = L_K^2.$$

La constante L_K est appelée la constante d'isotropie de K.

Proposition 2.2.1. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de centre de gravité l'origine. Alors, pour tout $S \in GL(\mathbb{R}^n)$, $L_K = L_{S(K)}$.*

Démonstration. Puisque l'application de $GL(\mathbb{R}^n)$ dans $GL(\mathbb{R}^n)$ qui à T associe $T \circ S$ est une bijection, alors

$$\begin{aligned} L_{S(K)}^2 &= \frac{1}{n} \min \left\{ \frac{1}{|T(S(K))|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{T(S(K))} |x|^2 \, \mathrm{d}x \, ; \, T \in GL(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \min \left\{ \frac{1}{|U(K)|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{U(K)} |x|^2 \, \mathrm{d}x \, ; \, U \in GL(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= L_K^2. \end{aligned}$$

□

Conjecture 2.2.2. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ en position isotrope. Alors, il existe une constante universelle $C > 0$ telle que*

$$L_K \leq C.$$

Proposition 2.2.3. *Pour tout corps convexe K de $\mathbb{R}^n$ en position isotrope et de volume 1, on a*

$$L_K \geq L_{\mathcal{B}_2^n} \geq \frac{1}{\sqrt{6\pi \mathrm{e}}}.$$

Démonstration. On note v_n le volume de la boule $\mathcal{B}_2^n$. On pose $r_n = v_n^{-\frac{1}{n}}$. Alors, $|r_n\mathcal{B}_2^n| = 1$ et $r_n\mathcal{B}_2^n$ est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ en position isotrope. Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ en position isotrope et de volume 1. Il est clair que si $x \in K \setminus r_n\mathcal{B}_2^n$, alors $|x| > r_n$ et si $x \in r_n\mathcal{B}_2^n \setminus K$, $|x| \le r_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} nL_K^2 &= \int_K |x|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{K\cap r_n\mathcal{B}_2^n} |x|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{K\setminus r_n\mathcal{B}_2^n} |x|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\ge \int_{K\cap r_n\mathcal{B}_2^n} |x|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{r_n\mathcal{B}_2^n\setminus K} |x|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{r_n\mathcal{B}_2^n} |x|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= nL_{r_n\mathcal{B}_2^n}^2 \\ &= nL_{\mathcal{B}_2^n}^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, $L_K \ge L_{\mathcal{B}_2^n}$.

Par ailleurs,

$$L_{\mathcal{B}_2^n}^2 = \frac{1}{n}\int_{r_n\mathcal{B}_2^n} |x|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{r_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |r\theta|^2 r^{n-1} \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{n} n v_n \frac{r_n^{n+2}}{n+2} = \frac{v_n^{-\frac{2}{n}}}{n+2}.$$

Puisque $v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$, il s'ensuit que

$$L_{\mathcal{B}_2^n}^2 = \frac{1}{n+2}\left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\right)^{-\frac{2}{n}} = \frac{1}{n+2}\frac{1}{\pi}\Gamma(1+\frac{n}{2})^{\frac{2}{n}} \ge \frac{1}{n+2}\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} \ge \frac{1}{6\pi\mathrm{e}}.$$

Finalement,

$$L_{\mathcal{B}_2^n} \ge \frac{1}{\sqrt{6\pi\mathrm{e}}}$$

indépendamment de la dimension.

□

La conjecture 2.2.2 nous dit que L_K est de l'ordre de 1. Nous allons maintenant voir une majoration de L_K dépendant de la dimension.

Lemme 2.2.4. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1 et de centre de gravité l'origine. Alors,*

$$\int_K \cdots \int_K |\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_n)|^2 \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{\det(M(K))}{n!}$$

où $M(K) = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} := \left(\int_K y_i y_j \,\mathrm{d}y\right)_{1\le i,j\le n}$ désigne la matrice d'inertie de K.

Démonstration. Soit l'opérateur $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui à e_i associe x_i. Alors,

$$|\mathrm{conv}(0, x_1, \dots, x_n)| = \int_{\mathrm{conv}(0,x_1,\dots,x_n)} \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{conv}(0,e_1,\dots,e_n)} |\det(T)|\mathrm{d}z = \frac{|\det(x_1, \dots, x_n)|}{n!}.$$

Par conséquent, en notant $C = \mathrm{conv}(0, x_1, \dots, x_n)$,

$$\begin{aligned}
(n!)^2 \int_{K^n} |C|^2 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n &= \int_{K^n} |\det(x_1, \dots, x_n)|^2 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \\
&= \int_{K^n} \left(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^n x_{i,\sigma(i)}\right)\left(\sum_\tau \varepsilon_\tau \prod_{i=1}^n x_{i,\tau(i)}\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \\
&= \int_{K^n} \left(\sum_{\sigma,\tau} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \prod_{i=1}^n x_{i,\sigma(i)} x_{i,\tau(i)}\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \\
&= \sum_{\sigma,\tau} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \prod_{i=1}^n \int_K x_{i,\sigma(i)} x_{i,\tau(i)} \, \mathrm{d}x_i \\
&= \sum_{\sigma,\tau} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),\tau(i)} \\
&= \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \sum_\tau \varepsilon_\tau \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),\tau(i)} \\
&= \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \det(m_{\sigma(i),j}) \\
&= \sum_\sigma \varepsilon_\sigma^2 \det(m_{i,j}) \\
&= n! \det(M(K))
\end{aligned}$$

où on écrit $x_i = (x_{i,j})$, $j = 1, \dots, n$ les coordonnées de $x_i \in \mathbb{R}^n$.

□

Corollaire 2.2.5. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1 en position isotrope. Alors,*

$$L_K^{2n} = n! \int_K \dots \int_K |\mathrm{conv}(0, x_1, \dots, x_n)|^2 \, \mathrm{d}x_1 \dots x_n.$$

Démonstration. Soit $T \in SL(\mathbb{R}^n)$. Alors, d'après le lemme 2.2.4, en notant encore $C = \mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_n)$,

$$\begin{aligned}
\int_{(T(K))^n} |C|^2 \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n &= \frac{1}{(n!)^2} \int_{(T(K))^n} |\det(x_1, \ldots, x_n)|^2 \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= \frac{1}{(n!)^2} \int_{K^n} |\det(T(z_1), \ldots, T(z_n))|^2 \,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_n \\
&= \frac{1}{(n!)^2} \int_{K^n} |\det(T)|^2 |\det(z_1, \ldots, z_n)|^2 \,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_n \\
&= \frac{1}{(n!)^2} \int_{K^n} |\det(z_1, \ldots, z_n)|^2 \,\mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_n \\
&= \int_{K^n} |C|^2 \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\det(M(T(K))) = \det(M(K)).$$

En prenant T tel que $T(K)$ soit en position isotrope, alors $M(T(K)) = L_K^2 Id$ et donc

$$\det(M(K)) = \det(M(T(K))) = L_K^{2n}.$$

Par conséquent,

$$L_K^{2n} = n! \int_K |\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_n)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Théorème 2.2.6. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1 en position isotrope. Alors, la constante d'isotropie vérifie*

$$L_K \leq \sqrt{n}.$$

Démonstration. On applique le corollaire 2.2.5.

$$L_K^{2n} = n! \int_K |\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_n)|^2 \,\mathrm{d}x \leq n!\,.$$

Par conséquent,

$$L_K \leq (n!)^{\frac{1}{2n}} \leq (n^n)^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{n}.$$

$\square$

Chapitre 3

corps convexes inconditionnels

Ce chapitre prend sa forme de l'étude des deux articles de Bobkov et Nazarov, [BOB-NAZ1] et [BOB-NAZ2].

3.1 Propriétés sympathiques

Définition 3.1.1 (Fonction inconditionnelle)**.** *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est inconditionnelle s'il existe une base $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$ s'écrivant $(x_1, \ldots, x_n)$ dans cette base, alors pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$,*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n).$$

Définition 3.1.2 (Ensemble à base inconditionnel)**.** *Un ensemble K de $\mathbb{R}^n$ est dit à base inconditionnelle ou simplement inconditionnel s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x \in K$ s'écrivant $(x_1, \ldots, x_n)$ dans cette base, alors pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n) \in K$. Autrement dit, si la fonction indicatrice de K est inconditionnelle dans cette base.*

Par la suite, lorsque $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nous noterons εx le vecteur $(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n)$.

Mettons en évidence quelques résultats qui découlent de cette propriété d'inconditionnalité. Nous allons le voir, cela facilite de nombreux problèmes et permet même de résoudre la conjecture de la majoration de la constante d'isotropie.

En définitive, l'inconditionnalité se fera suivant la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.1.3. *Soit K un corps convexe inconditionnel. Alors,*

$$K = \{\varepsilon x \,;\, \varepsilon \in \{-1, 1\}^n, x \in K\}.$$

En particulier, l'ensemble K est symétrique.

Démonstration. On a toujours $K \subset \{\varepsilon x\,;\,\varepsilon \in \{-1,1\}^n, x \in K\}$. La réciproque est immédiate par définition de l'inconditionnalité. En particulier, si $x \in K$ alors $-x \in K$ et réciproquement. Donc, l'ensemble K est symétrique. $\square$

Proposition 3.1.4. *Soit K un corps convexe inconditionnel. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in K$,*

$$\prod_{i=1}^{n}[-|x_i|, |x_i|] \subset K.$$

Démonstration. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$. Puisque l'ensemble K est inconditionnel, alors $\{\varepsilon x; \varepsilon \in \{-1,1\}^n\} \subset K$. Or, l'ensemble K est convexe, donc

$$\prod_{i=1}^{n}[-|x_i|, |x_i|] = \mathrm{conv}(\{\varepsilon x, \varepsilon \in \{-1,1\}^n\}) \subset K.$$

$\square$

Proposition 3.1.5. *Soit K un corps convexe inconditionnel et soit $\lambda > 0$. Alors,*
1) L'ensemble λK est inconditionnel.
2) L'ensemble $K \cap e_j^{\perp}$ est inconditionnel.

Démonstration. 1) Soient $x \in \lambda K$ et $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$. Alors, en utilisant la proposition 3.1.3,

$$\varepsilon x \in \varepsilon(\lambda K) = \lambda(\varepsilon K) \subset \lambda K.$$

2) Soient $x \in K \cap e_j^{\perp}$ et $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$. Alors, puisque K est inconditionnel, $\varepsilon x \in K$ et d'autre part on a $\varepsilon x \in e_j^{\perp}$. Donc, $\varepsilon x \in K \cap e_j^{\perp}$. $\square$

Proposition 3.1.6. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ inconditionnel. Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors,*

$$\int_K x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Démonstration. A partir des hypothèses de l'énoncé, on écrit

$$\begin{aligned}\int_K x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\mathrm{d}x &= \int_{S_{e_i}(K)} -x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\mathrm{d}x \\ &= -\int_K x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

où $S_{e_i}(x) = -2x_i e_i + x$. Donc,

$$\int_K x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$\square$

Proposition 3.1.7. *Soit K un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble K est inconditionnel si et seulement si la norme $\|.\|_K$ associée à K est inconditionnelle.*

Démonstration. $\underline{\Longrightarrow}$: On suppose l'ensemble K inconditionnel. Donc, pour tout $x \in K$, pour tout $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, $\varepsilon x \in K$. Ainsi, $\{\varepsilon K, \varepsilon \in \{-1,1\}^n\} = K$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|x\|_K &= \inf\{\lambda > 0\,;\, x \in \lambda K\} \\ &= \inf\{\lambda > 0\,;\, \varepsilon x \in \lambda \varepsilon K\} \\ &= \inf\{\lambda > 0\,;\, \varepsilon x \in \lambda K\} \\ &= \|\varepsilon x\|_K. \end{aligned}$$

$\underline{\Longleftarrow}$: On suppose que la norme $\|.\|_K$ soit inconditionnelle. Soit $x \in K$ et soit $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$. Alors, $\|\varepsilon x\|_K = \|x\|_K$. Or, $x \in K$, donc $\|x\|_K \leq 1$. Ainsi, $\|\varepsilon x\|_K \leq 1$. Par conséquent, $\varepsilon x \in K$. Donc, l'ensemble K est inconditionnel.

□

Proposition 3.1.8. *Soit K un corps convexe inconditionnel de $\mathbb{R}^n$. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$. Si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire uniformément distribué dans K, alors le vecteur aléatoire $\varepsilon X = (\varepsilon_1 X_1, \ldots, \varepsilon_n X_n)$ suit la même loi que le vecteur X.*

En particulier, les variables aléatoires

$$f(X) = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \qquad \textit{et} \qquad f(\varepsilon X) = \frac{\varepsilon_1 X_1 + \cdots + \varepsilon_n X_n}{\sqrt{n}}$$

ont même loi.

Démonstration. Observons $X = (X_1, \ldots, X_n)$ comme un vecteur aléatoire uniformément distribué dans K, c'est-à-dire que, en notant $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$,

$$\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|K|}\mathbf{1}_K(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x.$$

L'ensemble K est inconditionnel, donc par définition, le vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ appartient à K si et seulement si pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ le vecteur $(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n)$ appartient à K. Donc,

$$\mathbf{1}_K(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n) = \mathbf{1}_K(x_1, \ldots, x_n).$$

Par conséquent, si on note εX le vecteur $(\varepsilon_1 X_1, \ldots, \varepsilon_n X_n)$, alors

$$\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) = \frac{1}{|K|}\mathbf{1}_K(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|K|}\mathbf{1}_K(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathbb{P}_{\varepsilon X}(x).$$

Donc, le vecteur εX suit la même loi que le vecteur X.

□

Proposition 3.1.9. *Soit K un corps convexe inconditionnel de $\mathbb{R}^n$, alors nous avons* $|K \cap (\mathbb{R}_+)^n| = \frac{|K|}{2^n}$.

Démonstration. a) Puisque K est inconditionnel

$$K = \bigcup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \{\varepsilon x\,;\, x \in K \cap (\mathbb{R}_+)^n\}$$

où la réunion est disjointe, et pour $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$, toujours parce que K est inconditionnel,

$$|\{\varepsilon x\,;\, x \in K \cap (\mathbb{R}_+)^n\}| = |K \cap (\mathbb{R}_+)^n|.$$

Donc,

$$|K| = \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} |K \cap (\mathbb{R}_+)^n| = 2^n |K \cap (\mathbb{R}_+)^n|.$$

□

Proposition 3.1.10. *Soit K un corps convexe inconditionnel. Alors,*

$$K \cap e_j^{\perp} = \mathrm{P}_{e_j^{\perp}}(K).$$

Démonstration. D'après la proposition 3.1.4, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de K, on a $\prod_{i=1}^n [-|x_i|, |x_i|] \subset K$. Soit alors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{P}_{e_j^{\perp}}(K)$, alors par définition $x \in e_j^{\perp}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x + \lambda e_j \in K$. Par conséquent,

$$[-|x_1|, |x_1|] \times \cdots \times [-|x_j + \lambda|, |x_j + \lambda|] \times \cdots \times [-|x_n|, |x_n|] \subset K.$$

Ainsi, $x \in K$. Finalement, $x \in K \cap e_j^{\perp}$.

La réciproque provient de la proposition 1.2.15.

□

La condition de symétrie seule n'est pas suffisante en considérant par exemple dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble

$$\mathrm{conv}((-2,-1), (-1,-2), (2,1), (1,2)).$$

Par ailleurs, la condition d'inconditionnalité n'est pas nécessaire en considérant par exemple dans $\mathbb{R}^n$ l'ensemble $\mathcal{B}_1^n \cap (\mathbb{R}_+)^n$.

Proposition 3.1.11. *Soit K un corps convexe inconditionnel. Alors,*

$$\mathrm{P}_{e_j^{\perp}}(K \cap (\mathbb{R}_+)^n) = (K \cap (\mathbb{R}_+)^n) \cap e_j^{\perp}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{P}_{e_j^\perp}(K \cap (\mathbb{R}_+)^n)$. Alors, par définition, $x \in e_j^\perp$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x + \lambda e_j \in K \cap (\mathbb{R}_+)^n$. Donc, $x \in (\mathbb{R}_+)^n$. Or, l'ensemble K est inconditionnel, donc

$$[-|x_1|, |x_1|] \times \cdots \times [-|x_j + \lambda|, |x_j + \lambda|] \times \cdots \times [-|x_n|, |x_n|] \subset K.$$

Ainsi, $x \in K$. Par conséquent, $x \in (K \cap (\mathbb{R}_+)^n) \cap e_j^\perp$.

La réciproque provient de la proposition 1.2.15.

□

Par conséquent, lorsque K est un corps convexe inconditionnel,

$$\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K \cap (\mathbb{R}_+)^n) = K \cap (\mathbb{R}_+)^n \cap e_j^\perp = K \cap e_j^\perp \cap (\mathbb{R}_+)^n = \mathrm{P}_{e_j^\perp}(K) \cap (\mathbb{R}_+)^n.$$

Proposition 3.1.12. *Soit K un corps convexe inconditionnel. Alors, l'ensemble K° est inconditionnel.*

Démonstration. Soient $y \in K^\circ$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$. Alors, pour tout $x \in K$, $< y, x > \leq 1$. Par hypothèse, pour tout $x \in K$, $\varepsilon x \in K$. Soit donc $x \in K$, alors

$$< \varepsilon y, x > = < y, \varepsilon x > \leq 1.$$

Ainsi, $\varepsilon y \in K^\circ$.

□

3.2 Majoration de la constante d'isotropie

Le cadre de travail sera donc celui présenté au début du chapitre 1. On se donne K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1 et en position isotrope, en particulier les intégrales

$$\int_K x_j^2 \,\mathrm{d}x = L_K^2$$

ne dépendent pas de $j \in \{1, \ldots, n\}$. On suppose de plus que K est inconditionnel selon la base canonique de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in K$, l'ensemble K contient le parallélépipède rectangle $\prod_{j=1}^n [-|x_j|, |x_j|]$.

Nous savons que la constante d'isotropie L_K vérifie $c_1 \leq L_K$ et nous verrons dans la suite que L_K vérifie $L_K \leq c_2$, pour des constantes universelles $c_1, c_2 > 0$. Ce qui implique que la valeur moyenne de la norme euclidienne $|x|$ sur K vérifie,

$$\int_K |x|^2 \,\mathrm{d}x = \int_K x_1^2 + \cdots + x_n^2 \,\mathrm{d}x = nL_K^2.$$

Or, $c_1^2 n \leq L_K^2 n \leq c_2^2 n$, d'où

$$c_1^2 n \leq \int_K |x|^2 \,\mathrm{d}x \leq c_2^2 n.$$

Donc, la valeur moyenne de $|x|^2$ sur K, c'est-à-dire la quantité $\int_K |x|^2\,\mathrm{d}x$, est de l'ordre de n. D'autre part, par Jensen,

$$\int_K |x|\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_K |x|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_2\sqrt{n}$$

puis par Khintchine, il existe une constante universelle $C > 0$ telle que

$$\int_K |x|\,\mathrm{d}x \geq C\left(\int_K |x|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \geq Cc_1\sqrt{n}.$$

Ainsi, la valeur moyenne de $|x|$ sur K est de l'ordre de $\sqrt{n}$.

Il peut être utile d'associer à l'ensemble K sa partie normalisée K^+ dans l'octant $(\mathbb{R}_+)^n = ([0;+\infty[)^n$,

$$K^+ = 2K \cap (\mathbb{R}_+)^n.$$

Ainsi, si $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est vu comme un vecteur aléatoire uniformément réparti dans K, alors le vecteur aléatoire $(2|X_1|, \ldots, 2|X_n|)$ est uniformément réparti dans K^+. En effet, on montre

Proposition 3.2.1. *L'élément $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ si et seulement si l'élément $(2|x_1|, \ldots, 2|x_n|) \in K^+$.*

Démonstration. $\underline{\Rightarrow :}$ Puisque l'ensemble K est inconditionnel alors pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$, pour tout $x \in K$, alors $\varepsilon x \in K$. En choisissant, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(x_i)$, alors on obtient que $(|x_1|, \ldots, |x_n|) \in K$. Donc, $(2|x_1|, \ldots, 2|x_n|) \in 2K$ et on a évidemment $(2|x_1|, \ldots, 2|x_n|) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Ainsi, $(2|x_1|, \ldots, 2|x_n|) \in K^+$.

$\underline{\Leftarrow :}$ Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(2|x_1|, \ldots, 2|x_n|) \in K^+ = 2K \cap (\mathbb{R}_+)^n$. Alors, $(|x_1|, \ldots, |x_n|) \in K \cap (\mathbb{R}_+)^n \subset K$. L'ensemble K étant inconditionnel, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n) \in K$. En choisissant, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(x_i)$, alors on obtient que $(x_1, \ldots, x_n) \in K$. $\square$

Proposition 3.2.2. *L'ensemble K^+ possède les propriétés suivantes :*
1) $|K^+| = 1$.
2) Pour tout $x \in K^+$ et pour tout $y \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $y_j \leq x_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$, alors $y \in K^+$.
3) Pour tout $1 \leq j \leq n$, $\int_{K^+} x_j^2\,\mathrm{d}x = 4L_K^2$.

Démonstration. 1) En utilisant la proposition 3.1.9, on déduit que

$$|K^+| = |2K \cap (\mathbb{R}_+)^n| = \frac{|2K|}{2^n} = \frac{2^n}{2^n}|K| = 1$$

puisque l'inconditionnalité de K implique l'inconditionnalité de $2K$.

2) Par hypothèses, on sait que $y \in (\mathbb{R}_+)^n$. Il suffit donc de montrer que $y \in 2K$. Or, $x \in 2K \cap (\mathbb{R}_+)^n$ et $2K$ est convexe inconditionnel, donc pour tout $1 \leq j \leq n$, $[-x_j, x_j] \subset 2K$. Mais, pour tout $1 \leq j \leq n$, $0 \leq y_j \leq x_j$, donc pour tout $1 \leq j \leq n$, $y_j \in [-x_j, x_j] \subset 2K$. Donc, $y \in 2K$. Finalement, $y \in K^+$.

3) Soit $1 \leq j \leq n$. On utilise le fait que $\int_K x_j^2 \, \mathrm{d}x = L_K^2$. Alors,

$$\int_{K^+} x_j^2 \, \mathrm{d}x = \int_{2K\cap(\mathbb{R}_+)^n} x_j^2 \, \mathrm{d}x = \int_K (2|x_j|)^2 \, \mathrm{d}x = \int_K 4x_j^2 \, \mathrm{d}x = 4L_K^2.$$

□

Théorème 3.2.3. *La constante d'isotropie L_K vérifie*

$$L_K \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Première démonstration. Pour tout point $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^+$, l'ensemble K^+ contient le parallélépipède rectangle $\prod_{j=1}^n [0, x_j]$, car K est inconditionnel. Donc,

$$|\prod_{j=1}^n [0, x_j]| = \prod_{j=1}^n |[0, x_j]|_1 = \prod_{j=1}^n x_j \leq |K^+| = 1.$$

On considère l'ensemble $V = \{x \in (\mathbb{R}_+)^n \, ; \prod_{j=1}^n x_j \geq 1\}$. L'ensemble V possède les propriétés suivantes :

i) V est convexe.

ii) V est fermé.

iii) V et K^+ ne s'intersectent éventuellement qu'à la frontière.

Pour la propriété i), on considère x et y deux points de V et λ dans $[0, 1]$. Alors $\prod_{j=1}^n x_j \geq 1$ et $\prod_{j=1}^n y_j \geq 1$. On a par l'inégalité arithmético-géométrique

$$\prod_{j=1}^n [(1-\lambda)x_j + \lambda y_j] \geq \prod_{j=1}^n x_j^{1-\lambda} y_j^\lambda = \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)^{1-\lambda} \left(\prod_{j=1}^n y_j\right)^\lambda \geq 1.$$

Pour la propriété ii), on dit que V est l'image réciproque du fermé $[1; +\infty[$ par l'application continue $x \mapsto \prod_{j=1}^n x_j$.

La propriété iii) est évidente par définition des ensembles V et K^+.

Donc, d'après le théorème de Hahn-Banach, puisque K^+ est convexe compact, il existe un hyperplan qui sépare V et K^+. Peu importe la situation, on considère un hyperplan qui est en contact avec la frontière de V. Déterminons alors l'équation d'un tel hyperplan. On considère la fonction f à valeur dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ par

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} x_i}.$$

Ainsi, $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}\,; y \geq f(x)\}$. Par conséquent, le plan tangent en un point $u = (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) = (\overline{u}, u_n) \in V$ a pour équation

$$x_n = f(u_1, \dots, u_{n-1}) + < \nabla f(u_1, \dots, u_{n-1}), (x_1 - u_1, \dots, x_{n-1} - u_{n-1}) > .$$

Or,

$$\begin{aligned} \nabla f(u_1, \dots, u_{n-1}) &= \nabla \left(\frac{1}{u_1 \dots u_n} \right) \\ &= \left(-\frac{u_2 \dots u_{n-1}}{(u_1 \dots u_{n-1})^2}, \dots, -\frac{u_1 \dots u_{n-2}}{(u_1 \dots u_{n-1})^2} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{u_1(u_1 \dots u_{n-1})}, \dots, -\frac{1}{u_{n-1}(u_1 \dots u_{n-1})} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} < \nabla f(\overline{u}), x - \overline{u} > &= -\frac{1}{u_1 \dots u_{n-1}} \left(\frac{x_1 - u_1}{u_1}, \dots, \frac{x_{n-1} - u_{n-1}}{u_{n-1}} \right) \\ &= -\frac{1}{u_1 \dots u_{n-1}} \left(\frac{x_1}{u_1} + \dots + \frac{x_{n-1}}{u_{n-1}} - (n-1) \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{u_1 \dots u_{n-1}} - \frac{1}{u_1 \dots u_{n-1}} \left(\frac{x_1}{u_1} + \dots + \frac{x_{n-1}}{u_{n-1}} - (n-1) \right) \\ &= \frac{1}{u_1 \dots u_{n-1}} \left(n - \frac{x_1}{u_1} - \dots - \frac{x_{n-1}}{u_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Or, $u \in V$, donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \neq 0$. On pose alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i = \frac{1}{u_i}$. Par conséquent,

$$x_n = \lambda_1 \dots \lambda_{n-1} \left(n - \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_{n-1} x_{n-1} \right).$$

Donc,

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \frac{x_n}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}} = n.$$

Posons $\lambda_n = \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}$. Alors $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = n$. Finalement, tout hyperplan d'appui H de V a pour équation

$$H = \{x \in (\mathbb{R}_+)^n\,; \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = n\}$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i > 0$ et $\prod_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Par conséquent,

$$K^+ \subset \{x \in (\mathbb{R}_+)^n\,; \frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{n} \leq 1\}.$$

Par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$1 = \int_{K^+} \mathrm{d}x \geq \int_{K^+} \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{n} \mathrm{d}x \geq \left(\prod_{j=1}^{n} \int_{K^+} x_j \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Par une inégalité de type Khintchine (cf. proposition D.2.4),

$$\int_{K^+} x_j \, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{K^+} x_j^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais, par la propriété 3) de la proposition 3.2.2,

$$\int_{K^+} x_j^2 \, \mathrm{d}x = 4L_K^2.$$

Et donc,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{K^+} x_j^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} L_K.$$

Ainsi,

$$1 \geq \left(\prod_{j=1}^{n} \int_{K^+} x_j \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{K^+} x_j^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{K^+} x_j^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où, $1 \geq \sqrt{2} L_K$. Finalement,

$$L_K \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

□

Deuxième démonstration. Cette deuxième démonstration est inspirée de l'argument de [MEY]. Soit $x \in K^+$. Alors, puisque K^+ est convexe, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{conv}(x, (K^+)_i) \subset K^+$, où $(K^+)_i = \mathrm{P}_{e_i^\perp}(K^+)$. Donc, $\cup_{i=1}^n \mathrm{conv}(x, (K^+)_i) \subset K^+$. Ainsi,

$$|K^+| \geq | \cup_{i=1}^n \mathrm{conv}(x, (K^+)_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{conv}(x, (K^+)_i)| = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i |(K^+)_i|_{n-1}}{n}.$$

La dernière égalité correspond au volume du cône $\mathrm{conv}(x, (K^+)_i)$. Donc, en intégrant sur K^+, en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique puis l'inégalité de Loomis-Whitney (cf. théorème D.4.1),

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} |(K^+)_i|_{n-1} \int_{K^+} x_i \, \mathrm{d}x \\ &\geq \left(\prod_{i=1}^{n} |(K^+)_i|_{n-1} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{K^+} x_i \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\geq 1 \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{K^+} x_i \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$1 \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{K^+} x_i \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{K^+} x_i^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2} L_K$$

où on a utilisé une inégalité de type Khintchine (cf. proposition D.2.4) et la propriété 3) de la proposition 3.2.2. Finalement,

$$L_K \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

□

Troisième démonstration. Dans cette démonstration, on ne passe pas par K^+. On applique l'inégalité de Loomis-Whitney (cf. théorème D.4.1) directement à K,

$$1 = |K|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} |K_i|_{n-1}.$$

Donc, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|K_i|_{n-1} \geq 1$. Or, K est inconditionnel, donc d'après la proposition 3.1.10, $|K_i|_{n-1} = |K \cap e_i^{\perp}|_{n-1}$. On applique alors l'inégalité de Hensley (cf. corollaire D.2.15) qui affirme que pour toute mesure de probabilité log-concave inconditionnelle q sur $\mathbb{R}$,

$$q(0) \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q(t) \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par Fubini,

$$\int_K x_i^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} t^2 |\{x \in K\,; < x, e_i >= t\}|_{n-1} \, \mathrm{d}t.$$

On applique donc l'inégalité de Hensley à $q : t \mapsto |\{x \in K\,; < x, e_i >= t\}|_{n-1}$, pour obtenir

$$|K \cap e_i^{\perp}|_{n-1} L_K \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Finalement,

$$L_K \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

□

3.3 Sections hyperplanes

Lemme 3.3.1. *Les ensembles K_j et K_j^+ vérifient*

$$|K_j|_{n-1} = |K_j^+|_{n-1}.$$

Démonstration. On rappelle que

$$K_j^+ = K^+ \cap \{x_j = 0\} = 2K \cap (\mathbb{R}_+)^n \cap \{x_j = 0\}.$$

L'ensemble $2K \cap \{x_j = 0\}$ est inconditionnel, donc d'après la proposition 3.1.9,

$$|K_j^+|_{n-1} = |2K \cap \{x_j = 0\} \cap (\mathbb{R}_+)^n|_{n-1} = \frac{|2K \cap \{x_j = 0\}|_{n-1}}{2^{n-1}}.$$

D'autre part,

$$|2K \cap \{x_j = 0\}|_{n-1} = |2(K \cap \{x_j = 0\})|_{n-1} = 2^{n-1}|K \cap \{x_j = 0\}|_{n-1}.$$

Finalement,

$$|K_j^+|_{n-1} = \frac{|2K \cap \{x_j = 0\}|_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}|K_j|_{n-1}}{2^{n-1}} = |K_j|_{n-1}.$$

□

Proposition 3.3.2. *Pour tout hyperplan H dans $\mathbb{R}^n$ passant par l'origine, $|K \cap H|_{n-1} \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$. De plus, si K est invariant sous permutations des coordonnées, alors toute section $K_j = K \cap \{x_j = 0\}$, $1 \leq j \leq n$ satisfait $|K_j|_{n-1} \geq 1$.*

Démonstration. Puisque l'hyperplan H passe par l'origine, alors il existe $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que $H = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, <x, \theta>= 0\}$. Par Fubini :

$$\int_K <x,\theta>^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} t^2 |\{x \in K \,;\, <x,\theta>= t\}|_{n-1} \,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} t^2 q(t) \,\mathrm{d}t$$

en posant $q(t) = |\{x \in K \,;\, <x,\theta>= t\}|_{n-1}$. On applique alors l'inégalité de Hensley (cf. corollaire D.2.16)

$$q(0) \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q(t) \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Or,

$$q(0) = |\{x \in K\,;\, < x, \theta >= 0\}|_{n-1} = |H \cap K|_{n-1}.$$

D'autre part, en utilisant l'isotropie de K,

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 q(t)\,\mathrm{d}t = \int_K < x, \theta >^2\ \mathrm{d}x = \int_K x_j^2\,\mathrm{d}x = L_K^2.$$

Ainsi,

$$|H \cap K|_{n-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{L_K}.$$

Par le théorème 3.2.3, $L_K \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où

$$|H \cap K|_{n-1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

On suppose maintenant que K est invariant sous permutations des coordonnées. On écrit la décomposition de Steiner pour les volumes mixtes du volume de l'ensemble $K^+ + r[0,1]^n$. On a évidemment que

$$K^+ + r[0,1]^n = K^+ + r[0,e_1] + \cdots + r[0,e_n].$$

Donc, d'après la proposition 1.8.6,

$$|K^+ + r[0,1]^n| = \sum_{k=0}^{n} a_k(K^+) r^k$$

où $a_k(K^+) = \sum_{\mathrm{card}(\pi)=k} |K_\pi^+|_{n-k}$, $\pi \subset \{1,\ldots,n\}$ et K_π^+ désigne la projection de K^+ avec le sous-espace affine $(n-\mathrm{card}(\pi))$-dimensionnel $\{x\,;\,x_j = 0,\ \forall j \in \pi\}$, avec la convention que $a_0 = |K^+|_n$ et que pour tout ensemble A de $\mathbb{R}^n$, $|A|_0 = 1$. En utilisant l'inégalité de Brunn-Minkowski, on a

$$|K^+ + r[0,1]^n| \geq \left(|K^+|^{\frac{1}{n}} + r|[0,1]^n|^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1+r)^n \geq 1 + nr.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |K^+| + \sum_{k=1}^{n} a_k(K^+) r^k &\geq 1 + nr \\ \sum_{k=1}^{n} a_k(K^+) r^{k-1} &\geq n. \end{aligned}$$

Donc, $a_1(K^+) \geq n$, tous les coefficients étant positifs et r aussi. Autrement dit,

$$\sum_{j=1}^{n} |K_j^+|_{n-1} \geq n.$$

Puisque K est invariant sous permutations des coordonnées, il s'ensuit que

$$|K_1^+|_{n-1} = \cdots = |K_n^+|_{n-1}.$$

Par conséquent, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $|K_j^+|_{n-1} \geq 1$. Et puisque d'après le lemme 3.3.1, $|K_j^+|_{n-1} = |K_j|_{n-1}$, alors pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$|K_j|_{n-1} \geq 1.$$

Une autre manière de démontrer ce résultat est de passer par l'inégalité de Loomis-Whitney (cf. théorème D.4.1). En effet, celle-ci affirme que

$$|K|_n^{n-1} \leq \prod_{j=1}^n |K_j|_{n-1}.$$

Par conséquent,

$$1 \leq \prod_{j=1}^n |K_j|_{n-1} = |K_j|_{n-1}^n$$

la dernière égalité vient du fait que K est invariant sous permutations des coordonnées. Finalement, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$|K_j|_{n-1} \geq 1.$$

□

3.4 Inégalités de déviations et corps extrémal

Proposition 3.4.1. *Pour tout* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$*,*

$$|\{x \in K^+ \,;\, x_1 \geq \alpha_1, \ldots, x_n \geq \alpha_n\}| \leq \mathrm{e}^{-c(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}$$

et

$$|\{x \in K^+ \,;\, x_1 \geq \alpha_1, \ldots, x_n \geq \alpha_n\}| \leq \Big(1 - \frac{c}{n}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\Big)^n$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Si K est invariant sous permutations des coordonnées, on peut prendre $c = 1$.

Démonstration. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$. On considère la fonction

$$u(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = |\{x \in K^+ \,;\, x_1 \geq \alpha_1, \ldots, x_n \geq \alpha_n\}|.$$

Alors,
i) u est log-concave sur $\mathbb{R}^n$.

En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0,1]$. Si on considère les ensembles

$$A = \{x \in K^+ \,;\, x_1 \geq \alpha_1, \dots, x_n \geq \alpha_n\}$$
$$B = \{x \in K^+ \,;\, x_1 \geq \beta_1, \dots, x_n \geq \beta_n\}$$

alors de manière évidente les ensembles A et B sont convexes. On le montre pour A par exemple. Soient $a, b \in A$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors,

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}\,,\; (1-\lambda)a_j + \lambda b_j \geq (1-\lambda)\alpha_j + \lambda\alpha_j = \alpha_j.$$

Les ensembles A et B étant convexes, on peut appliquer Brunn-Minkowski

$$|(1-\lambda)A + \lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}.$$

Or,

$$\begin{aligned}(1-\lambda)A + \lambda B &= \{x \in K^+ \,;\, x = (1-\lambda)a + \lambda b \,;\, a \in A, b \in B\} \\ &\subset \{x \in K^+ \,;\, \forall i \in \{1, \dots, n\},\, x_i \geq (1-\lambda)\alpha_i + \lambda\beta_i\}.\end{aligned}$$

Il vient que

$$u((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta) \geq |(1-\lambda)A + \lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda} = u(\alpha)^{1-\lambda}u(\beta)^{\lambda}.$$

ii) u vérifie

$$u(0) = |\{x \in K^+ \,;\, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}| = |K^+| = 1.$$

iii)

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_j}(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(0) - u(\varepsilon e_j)}{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\varepsilon}|\{x \in K^+ \,;\, 0 \leq x_j \leq \varepsilon\}| = -|K^+ \cap e_j^{\perp}|.$$

Donc, en appliquant le lemme 3.3.1 et la proposition 3.3.2,

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_j}(0) \leq -c.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(\log(u(\alpha)))\Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{u(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial \alpha_j}(\alpha)\Big|_{\alpha=0} \leq -c\,.$$

On considère sur $[0,1]$ la fonction $u_\alpha : t \mapsto u(\alpha t)$. Puisque la fonction $\log(u)$ est concave, alors la fonction $\log(u_\alpha)$ est concave et est donc dérivable à droite et à gauche en tout point de $[0,1]$, et ainsi elle est dérivable en 0. Alors,

$$\begin{aligned}\log(u_\alpha)'(0) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(\log(u(\alpha)))\Big|_{\alpha=0} \\ &\leq -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j c \\ &= -c(\alpha_1 + \dots + \alpha_n).\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.4.7, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\frac{\log(u_\alpha(t)) - \log(u_\alpha(0))}{t} \geq \log(u_\alpha(1)) - \log(u_\alpha(0)).$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\log(u(t)) \leq \log(u_\alpha)'(0) \leq -c(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Par conséquent,

$$u(\alpha) \leq \mathrm{e}^{-c(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}.$$

En fait, on a même que la fonction u est $\frac{1}{n}-$concave, toujours d'après Brunn-Minkowski. Donc,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}(u^{\frac{1}{n}}(\alpha))\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial u}{\partial \alpha_j}(\alpha)\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}(\alpha)\bigg|_{\alpha=0} \leq -\frac{c}{n}.$$

Par le même procédé que précédemment,

$$u^{\frac{1}{n}}(\alpha) - u^{\frac{1}{n}}(0) \leq -\frac{c}{n}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Par suite,

$$u^{\frac{1}{n}}(\alpha) \leq 1 - \frac{c}{n}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n).$$

Finalement,

$$u(\alpha) \leq \left(1 - \frac{c}{n}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\right)^n.$$

□

Corollaire 3.4.2. *Pour tout* $(x_1, \ldots, x_n) \in K^+$, *alors* $x_1 + \cdots + x_n \leq \sqrt{6}n$.

De manière équivalente, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in K$, *alors on a l'inégalité* $|x_1| + \cdots + |x_n| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}n$. *Autrement dit, l'ensemble* K *est contenu dans l'ensemble* $\frac{\sqrt{6}}{2}n\mathcal{B}_1^n$.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3.4.1 puisque pour tous $x_1, \ldots, x_n \geq 0$

$$|\{y \in K^+\,;\, y_1 \geq x_1, \ldots, y_n \geq x_n\}|^{\frac{1}{n}} \leq 1 - \frac{c}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

On en déduit qu'en particulier pour tous $x \in K^+$

$$1 - \frac{c}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \geq 0.$$

Finalement,

$$x_1 + \cdots + x_n \leq \sqrt{6}n$$

car on rappelle que $c = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

On a vu dans la proposition 3.2.1 que le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ si et seulement si le vecteur $(2|x_1|, \dots, 2|x_n|) \in K^+$.

Ainsi, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in K$, alors $(2|x_1|, \dots, 2|x_n|) \in K^+$, et donc

$$2|x_1| + \dots + 2|x_n| \leq \sqrt{6}n.$$

Finalement, $|x_1| + \dots + |x_n| \leq \frac{\sqrt{6}}{2}n$.

□

Proposition 3.4.3. *L'ensemble K contient le cube $[-\frac{1}{\sqrt{2}}L_K, \frac{1}{\sqrt{2}}L_K]^n$, qui lui-même contient le cube $[-\frac{1}{2\sqrt{\pi e}}, \frac{1}{2\sqrt{\pi e}}]^n$.*

Démonstration. L'ensemble K^+ est convexe, donc le barycentre v de K^+ est dans K^+, où

$$bar(v) = \left(\int_{K^+} x_j \,\mathrm{d}x\right)_{1 \leq j \leq n} = (v_j)_{1 \leq j \leq n}.$$

Donc, $\prod_{j=1}^n [0, v_j]$ est contenu dans K^+. Or,

$$v_j = \int_{K^+} x_j \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{K^+} x_j^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}L_K.$$

Donc, $\prod_{j=1}^n [0, \sqrt{2}L_K]$ est contenu dans K^+. Il vient que $\prod_{j=1}^n [0, \frac{\sqrt{2}}{2}L_K]$ est contenu dans K. Finalement,

$$[-\frac{1}{\sqrt{2}}L_K, \frac{1}{\sqrt{2}}L_K]^n \subset K.$$

D'autre part, on sait que $L_K \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. Donc, $[-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}]^n \subset K$. Finalement,

$$[-\frac{1}{2\sqrt{\pi e}}, \frac{1}{2\sqrt{\pi e}}]^n \subset K.$$

□

En outre, les ensembles $\frac{1}{2\sqrt{\pi e}}\mathcal{B}_\infty^n$ et $\frac{\sqrt{6}}{2}n\mathcal{B}_1^n$ ont un volume de l'ordre de 1. En effet,

$$|\frac{\sqrt{6}}{2}n\mathcal{B}_1^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{6}}{2}n\frac{2}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{6}n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

Donc,

$$\sqrt{6} \leq |\frac{\sqrt{6}}{2}n\mathcal{B}_1^n|^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt{6}\mathrm{e}.$$

Puis,

$$|\frac{1}{2\sqrt{\pi e}}\mathcal{B}_\infty^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{2\sqrt{\pi e}} = \frac{1}{\sqrt{\pi e}}.$$

Par conséquent, nous venons de montrer que parmi tous les corps convexes K de $\mathbb{R}^n$ inconditionnels pour la base canonique et en position isotrope de volume 1, la boule ℓ_1^n normalisée est l'ensemble le plus large et la boule ℓ_∞^n normalisée est l'ensemble le plus petit, tout ceci au sens de l'inclusion. Plus précisément,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi e}}\mathcal{B}_\infty^n \subset K \subset \frac{\sqrt{6}}{2}n\mathcal{B}_1^n.$$

3.5 Généralisation aux mesures de probabilité log-concaves

On peut étendre tous les résultats obtenus dans la section précédente à des mesures de probabilité log-concaves. Pour cela, on se donne μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ ayant une densité log-concave $p(x), x \in \mathbb{R}^n$ et telle que
1) $p(0) = 1$.
2) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $p(\varepsilon x) = p(x)$.
3) $\int_{\mathbb{R}^n} x_j^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} x_j^2 p(x)\,\mathrm{d}x = L_\mu^2$ ne dépend pas de $j \in \{1, \ldots, n\}$.
La propriété 2) nous dit que p est inconditionnelle et la propriété 3) nous dit que, dans un certain sens, p est en position isotrope.

On déduira la section précédente de cette section en choisissant comme mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ $\mathrm{d}\mu(x) = p(x)\mathrm{d}x$ où $p(x) = \mathbf{1}_K(x)$ car alors p est log-concave d'après la propriété 1.4.14 et

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(x)\,\mathrm{d}x = |K| = 1$$

donc p est une mesure de probabilité et vérifie d'autre part 1), 2) et 3) par hypothèses sur K.

Comme dans le cas des corps convexes en position isotrope, on associe à μ sa restriction contractée μ^+ définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$. Dans ce cas, μ^+ a pour densité $p^+(x) = p\left(\frac{1}{2}x\right), x \in (\mathbb{R}_+)^n$. Ainsi, si le vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est réparti selon μ, alors le vecteur $(2|x_1|, \ldots, 2|x_n|)$ est réparti selon μ^+. D'autre part, p^+ est log-concave puisque p l'est, p^+ vérifie $p^+(0) = 1$ et donc, puisque p^+ est log-concave, atteint son maximum en 0 et est définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$, alors d'après la proposition 1.4.15, elle est décroissante en chaque coordonnée. D'autre part, p^+ satisfait

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x_j^2 \,\mathrm{d}\mu^+(x) = \int_{(\mathbb{R}_+)^n} x_j^2 p\left(\frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (2x_j)^2 p(u)\,\mathrm{d}u = 4L_\mu^2$$

pour tout $1 \leq j \leq n$.

Proposition 3.5.1. *La quantité L_μ vérifie*

$$L_\mu \leq C$$

pour une constante C universelle.

Démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Puisque la densité p^+ est décroissante en chaque coordonnée, alors

$$1 = \int_{(\mathbb{R}_+)^n} p^+(y)\,\mathrm{d}y \geq \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} p^+(y)\,\mathrm{d}y \geq \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} p^+(x)\,\mathrm{d}y = p^+(x) \prod_{j=1}^n x_j.$$

Donc,

$$\frac{1}{p^+(x)} \geq \prod_{j=1}^n x_j.$$

Ainsi,

$$u(x) := -\log(p^+(x)) \geq \log\left(\prod_{j=1}^n x_j\right) := v(x).$$

Puisque la fonction u est convexe et la fonction v est concave, il existe, d'après le théorème de Hahn-Banach, une application affine l telle que pour tout $x \in (\mathbb{R}_+)^n$,

$$u(x) \geq l(x) \geq v(x).$$

On choisit l comme étant la tangente à v au point $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $a_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi,

$$l(x) = v(a) + < \nabla v(a), x - a >= \log\left(\prod_{j=1}^n a_j\right) + \sum_{j=1}^n \frac{x_j - a_j}{a_j}.$$

En posant $\lambda_j = \frac{1}{a_j}$, l'inégalité $u(x) \geq l(x)$ devient

$$-\log(p^+(x)) \geq \log\left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}\right) + \sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j - 1).$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^+(x)} &\geq \prod_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \mathrm{e}^{\lambda_j x_j - n} \\ p^+(x) &\leq \mathrm{e}^n \prod_{j=1}^n \lambda_j \mathrm{e}^{-\lambda_j x_j} \end{aligned}$$

et cela pour tout $x \in (\mathbb{R}_+)^n$. En particulier, puisque $p^+(0) = 1$, alors

$$1 \leq \mathrm{e}^n \prod_{j=1}^n \lambda_j.$$

Autrement dit,

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda_j \geq \mathrm{e}^{-n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{(\mathbb{R}_+)^n} \prod_{j=1}^{n} x_j p^+(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int_{(\mathbb{R}_+)^n} \prod_{j=1}^{n} x_j \left(\mathrm{e}^n \prod_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{e}^{-\lambda_j x_j} \right) \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^n \int_{(\mathbb{R}_+)^n} \prod_{j=1}^{n} x_j \lambda_j \mathrm{e}^{-\lambda_j x_j}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \\
&= \mathrm{e}^n \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}_+} x_j \lambda_j \mathrm{e}^{-\lambda_j x_j}\,\mathrm{d}x_j \\
&= \mathrm{e}^n \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \\
&\leq \mathrm{e}^{2n}.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de $\prod_{j=1}^{n} \lambda_j \geq \mathrm{e}^{-n}$. Par définition,

$$\|f\|_{L^0(\mu^+)} = \lim_{p \to 0^+} \|f\|_{L^p(\mu^+)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mu^+)} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\log\left(\int \mathrm{e}^{p \log(|f|)}\,\mathrm{d}\mu^+\right)} \\
&\underset{p \to 0^+}{\sim} \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\log\left(\int 1 + p\log(|f|)\,\mathrm{d}\mu^+\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\log\left(1 + \int p\log(|f|)\,\mathrm{d}\mu^+\right)} \\
&\underset{p \to 0^+}{\sim} \mathrm{e}^{\frac{1}{p} p \int \log(|f|)\,\mathrm{d}\mu^+} \\
&= \mathrm{e}^{\int \log(|f|)\,\mathrm{d}\mu^+}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|\prod_{j=1}^{n} x_j\|_{L^0(\mu^+)} &= \mathrm{e}^{\int \log(\prod_{j=1}^{n} |x_j|)\,\mathrm{d}\mu^+} \\
&= \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{n} \int \log(|x_j|)\,\mathrm{d}\mu^+} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\int \log(|x_j|)\,\mathrm{d}\mu^+} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|_{L^0(\mu^+)}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, par croissance des normes $L^p(\mu^+)$,

$$\|\prod_{j=1}^{n} x_j\|_{L^1(\mu^+)} \geq \|\prod_{j=1}^{n} x_j\|_{L^0(\mu^+)} = \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|_{L^0(\mu^+)} \geq c^n \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|_{L^2(\mu^+)} = (2cL_\mu)^n$$

où la dernière inégalité est une inégalité de type Khintchine, la constante $c > 0$ étant une constante universelle (cf. [LAT]). Finalement,

$$\mathrm{e}^{2n} \geq (2cL_\mu)^n.$$

Autrement dit,

$$L_\mu \leq \frac{\mathrm{e}^2}{2c}$$

où $c > 0$ est une constante universelle.

□

Proposition 3.5.2. *Pour toute densité de probabilité log-concave inconditionnelle p sur $\mathbb{R}^n$ telle que $p(0) = 1$, alors*

$$\prod_{j=1}^{n} \int_{\{x_j=0\}} p(x)\,\mathrm{d}x \geq \mathrm{e}^{-n}.$$

Démonstration. On applique la forme fonctionnelle de l'inégalité de Loomis-Whitney (cf. proposition D.4.3) en prenant comme fonction notre densité de probabilité p, qui est log-concave et qui atteint son maximum en 0, donc ici,

$$\sup_{x_j \in \mathbb{R}} p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Alors,

$$\prod_{j=1}^{n} \int_{\{x_j=0\}} p(x)\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(x)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{n-1}.$$

Or, $p(0) = 1$ et p est log-concave, donc pour tout $t \in]0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$p(tx) = p(tx + (1-t)0) \geq p(x)^t p(0)^{1-t} = p(x)^t.$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(tx)^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(tx)^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} p(u)^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi, en prenant $t = \frac{n-1}{n}$, on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} p(x)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{n-1} \geq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n(n-1)}.$$

Or,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n(n-1)} = \mathrm{e}^{n(n-1)\log(1-\frac{1}{n})} \geq \mathrm{e}^{-(n-1)} = \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{1} \geq \mathrm{e}^{-n}.$$

Finalement,

$$\prod_{j=1}^{n} \int_{\{x_j=0\}} p(x)\,\mathrm{d}x \geq \mathrm{e}^{-n}.$$

□

La constante $\frac{1}{\mathrm{e}}$ qui apparaît dans la minoration est asymptotiquement optimale. En effet, si on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$p : x \mapsto \mathrm{e}^{-2(n!)^{\frac{1}{n}}\|x\|_\infty}.$$

Alors, on a de suite que $p(0) = 1$, p est positive, inconditionnelle et log-concave. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2(n!)^{\frac{1}{n}}\|x\|_\infty}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{2(n!)^{\frac{1}{n}}\|x\|_\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} |\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, 2(n!)^{\frac{1}{n}}\|x\|_\infty \leq t\}|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \frac{2^n}{(2(n!)^{\frac{1}{n}})^n}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc, la fonction p verifie les hypothèses de la proposition 3.5.2. Enfin,

$$\begin{aligned}
\int_{\{x_j=0\}} p(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} |\{x \in \mathbb{R}^{n-1} \,;\, 2(n!)^{\frac{1}{n}}\|x\|_\infty \leq t\}|_{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{n-1} \frac{1}{(n!)^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(n-1)!}{(n!)^{\frac{n-1}{n}}} \\
&= \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \sim_{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = (\sqrt{2\pi n})^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\mathrm{e}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Corollaire 3.5.3. *Pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ passant par l'origine,*

$$\int_H p(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{6}}.$$

Si, de plus, p est invariante sous permutations des coordonnées, alors pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$\int_{\{x_j=0\}} p(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Démonstration. La proposition 3.5.2 nous dit que

$$\max_{j\in\{1,\dots,n\}} \int_{\{x_j=0\}} p(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

On considère les densités de probabilité définies sur $\mathbb{R}$ par

$$q_1(t) = \int_{<x,\theta_1>=t} p(x)\,\mathrm{d}x \qquad q_2(t) = \int_{<x,\theta_2>=t} p(x)\,\mathrm{d}x$$

où $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$. Alors, les inégalités de Hensley (cf. corollaire D.2.15 et D.2.16) nous disent que

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq q_1(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q_1(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et,

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \leq q_2(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q_2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \leq \frac{q_1(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q_1(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}}{q_2(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q_2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \sqrt{6}.$$

Or, par l'hypothèse d'isotropie de p,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q_1(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q_2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, pour tout hyperplan H_1 et H_2 passant par l'origine,

$$\int_{H_1} p(x)\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{6}\int_{H_2} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par conséquent,

$$\min_H \int_H p(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{6}} \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \int_{\{x_j=0\}} p(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{6}}.$$

Finalement, pour tout hyperplan H passant par l'origine,

$$\int_H p(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{6}}.$$

$\square$

Ceci implique la proposition 3.5.1. En effet,

Corollaire 3.5.4. *La quantité L_μ vérifie*

$$L_\mu \leq \mathrm{e}\sqrt{3}.$$

Dans le cas où μ est invariante sous permutations des coordonnées,

$$L_\mu \leq \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}}.$$

Démonstration. Par hypothèse du corollaire 3.5.3, l'hyperplan H a pour équation, pour un certain $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < x, \theta >= 0\}.$$

Par Fubini,

$$L_\mu^2 = \int_{\mathbb{R}^n} x_j^2 p(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} t^2 q(t)\,\mathrm{d}t$$

où $q(t) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, < x, \theta >= t\})$, qui est bien symétrique puisque l' on a supposé, au début de cette section, que μ possède une densité de probabilité inconditionnelle. Ensuite, on applique l'inégalité de Hensley (cf. corollaire D.2.15),

$$q(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Or, $q(0) = \mu(H) = \int_H p(x)\,\mathrm{d}x$, et $\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 q(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = L_\mu$. Finalement,

$$\int_H p(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{2}L_\mu}.$$

D'après le corollaire 3.5.3,

$$\int_H p(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{6}}.$$

Donc,

$$L_\mu \leq \mathrm{e}\sqrt{3}.$$

Dans le cas où μ est invariante sous permutations des coordonnées,

$$L_\mu \leq \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}}.$$

□

En conséquence de la proposition 3.5.2, nous avons une version analogue de la proposition 3.4.1.

Proposition 3.5.5. *Pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$,*

$$\mu^+\left(\{x \in (\mathbb{R}_+)^n\,;\, x_1 \geq \alpha_1, \ldots, x_n \geq \alpha_n\}\right) \leq \mathrm{e}^{-c(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}$$

où $c = \frac{1}{e\sqrt{6}}$.

Si μ est invariante sous permutations des coordonnées, on peut prendre $c = \frac{1}{e}$.

3.6 Inégalités de grandes déviations pour la norme $\|.\|_{\ell_1^n}$

Pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, ses coordonnées peuvent être réarrangées dans l'ordre décroissant,

$$X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_n$$

où $X_1 = \max_{j \in \{1,\dots,n\}} x_j$ et $X_n = \min_{j \in \{1,\dots,n\}} x_j$.

Lorsque x est vu comme un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ uniformément réparti par rapport à μ^+, alors il en est de même pour le vecteur $(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, les propriétés vues précédemment s'appliquent pour $(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition 3.6.1. *Pour tout $\alpha \geq 0$ et tout $1 \leq k \leq n$*

$$\mu^+ \left(\{x \in (\mathbb{R}_+)^n \,;\, X_k \geq \alpha\}\right) \leq \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-ck\alpha}$$

où $c = \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{6}}$ ou $\frac{1}{\mathrm{e}}$ suivant que μ est invariante ou non sous permutations des coordonnées, et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ désigne les coefficients binomiaux.

Démonstration. On écrit

$$\{x \in (\mathbb{R}_+)^n \,;\, X_k \geq \alpha\} = \cup_{1 \leq j_k \leq \cdots \leq j_1 \leq n} \{x \in (\mathbb{R}_+)^n \,;\, x_{j_1} \geq \alpha, \dots, x_{j_k} \geq \alpha\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mu^+(\{x \in (\mathbb{R}_+)^n \,;\, X_k \geq \alpha\}) &\leq \sum_{1 \leq j_k \leq \cdots \leq j_1 \leq n} \mu^+(\{x_{j_1} \geq \alpha, \dots, x_{j_k} \geq \alpha\}) \\
&\leq \sum_{1 \leq j_k \leq \cdots \leq j_1 \leq n} \mathrm{e}^{-ck\alpha} \\
&= \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-ck\alpha}.
\end{aligned}$$

□

De manière générale, on peut montrer que

Proposition 3.6.2. *Pour toutes collections d'indices $1 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_r \leq n$ et pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0$,*

$$\mu^+(\{X_{k_1} \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq X_{k_r} \geq \alpha_r\}) \leq \frac{n! \mathrm{e}^{-c(k_1\alpha_1 + (k_2-k_1)\alpha_2 + \cdots + (k_r - k_{r-1}))}}{k_1!(k_2-k_1)! \dots (k_r - k_{r-1})!(n-k_r)!}$$

avec $c > 0$ une constante numérique.

Voyons maintenant une application possible aux grandes déviations.

Proposition 3.6.3. *Pour tout $t \geq 0$,*

$$\mu(\{\frac{c}{n}\|x\|_{\ell_n^1} \geq 1+t\}) \leq n\mathrm{e}^{-2t\frac{n}{\log(n)+1}}.$$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mu(\{\|x\|_{\ell_n^1} \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k\}) &= \mu(\{\sum_{k=1}^n |x_k| \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k\}) \\
&= \mu^+(\{\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2} \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k\}) \\
&= \mu^+(\{\sum_{k=1}^n X_k \geq \sum_{k=1}^n 2\alpha_k\}).
\end{aligned}$$

Or,

$$\{\sum_{k=1}^n X_k \geq \sum_{k=1}^n 2\alpha_k\} \subset \cup_{k=1}^n \{X_k \geq 2\alpha_k\}.$$

En effet, si $x \in \{\sum_{k=1}^n X_k \geq \sum_{k=1}^n 2\alpha_k\}$, alors il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $X_j \geq 2\alpha_j$. Donc, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in \{X_j \geq 2\alpha_j\}$. Ainsi,

$$x \in \cup_{k=1}^n \{X_k \geq 2\alpha_k\}.$$

De ceci, on obtient

$$\mu^+\{\sum_{k=1}^n X_k \geq \sum_{k=1}^n 2\alpha_k\} \leq \sum_{k=1}^n \mu^+\{X_k \geq 2\alpha_k\} \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-2ck\alpha_k}.$$

En utilisant le fait que $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$ (cf. corollaire B.1.5), on obtient que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-2ck\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{ne}{k}\right)^k \mathrm{e}^{-2ck\alpha_k} = \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{k\log\left(\frac{ne}{k}\right)-2ck\alpha_k} = \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-k(2c\alpha_k - \log\left(\frac{ne}{k}\right))}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\mu(\{c\|x\|_{\ell_n^1} \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k\}) &\leq \sum_{k=1}^n \mu^+\{X_k \geq \frac{2\alpha_k}{c}\} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-2k\alpha_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-k(2\alpha_k - \log\left(\frac{ne}{k}\right))}.
\end{aligned}$$

Maintenant, il faut faire un bon choix de α_k. Si on prend

$$\alpha_k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{ne}{k}\right) + t\frac{n}{k(\log(n)+1)}$$

alors, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\alpha_k \geq 0$ et

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leq n(1+t).$$

En effet, commençons par montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \log(n) + 1$. Sachant que l'entier k parcourt l'intervalle $[1, n]$ de 1 en 1, on écrit, pour $k \leq t \leq k+1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k+1} &\leq \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \log(n).
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \log(n) + 1 - \frac{1}{n+1} \leq \log(n) + 1.$$

Puisque $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \log(n) + 1$ et $n! \geq (\frac{n}{\mathrm{e}})^n$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \alpha_k &= \frac{1}{2} \log\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{n\mathrm{e}}{k}\right) + \frac{nt}{\log(n)+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&\leq \frac{1}{2} \log\left(\frac{(n\mathrm{e})^n}{n!}\right) + nt \\
&\leq \frac{1}{2} \log\left((n\mathrm{e})^n \left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n\right) + nt \\
&= \frac{1}{2} \log\left(e^{2n}\right) + nt \\
&= n(1+t).
\end{aligned}$$

Donc, on a l'inclusion suivante

$$\{c\|x\|_{\ell_n^1} \geq n(1+t)\} \subset \{c\|x\|_{\ell_n^1} \geq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\mu(\{\frac{c}{n}\|x\|_{\ell_n^1} \geq 1+t\}) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k(2\alpha_k - \log(\frac{ne}{k}))} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k(\log(\frac{ne}{k})+2t\frac{n}{k(\log(n)+1)}-\log(\frac{ne}{k}))} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2t\frac{n}{\log(n)+1}} \\
&= n\mathrm{e}^{-2t\frac{n}{\log(n)+1}}.
\end{aligned}$$

□

Par exemple, pour $t=1$, on obtient

$$\mu(\{\|x\|_{\ell_n^1} \geq 2\mathrm{e}\sqrt{6}n\}) \leq n\mathrm{e}^{-2\frac{n}{\log(n)+1}}.$$

3.7 Inégalités de grandes déviations pour la norme $\|.\|_{\ell_2^n}$

Comme pour la section précédente, nous allons mettre en évidence ici un résultat de grandes déviations pour la norme euclidienne $\|x\|_{\ell_n^2} = |x|$. Nous allons également nous servir du réarrangement décroissant.

Proposition 3.7.1. *Pour tout $t \geq 4$,*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\ \frac{c|x|}{\sqrt{n}} \geq t\}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t\sqrt{n}}$$

où $c = \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{6}}$ ou $\frac{1}{\mathrm{e}}$ suivant que μ est invariante ou non sous permutations des coordonnées.

Démonstration.

$$\mu(\{|x|^2 \geq \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\}) = \mu^+(\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{2}\right)^2 \geq \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\}) = \mu^+(\{\sum_{k=1}^{n}X_k^2 \geq 4\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\}).$$

Or, par un argument similaire vu précédemment,

$$\{\sum_{k=1}^{n}X_k^2 \geq \sum_{k=1}^{n}4\alpha_k^2\} \subset \cup_{k=1}^{n}\{X_k^2 \geq 4\alpha_k^2\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\mu^+(\{\sum_{k=1}^n X_k^2 \geq 4\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\}) &\leq \sum_{k=1}^n \mu^+(\{X_k^2 \geq 4\alpha_k^2\}) \\
&= \sum_{k=1}^n \mu^+(\{X_k \geq 2\alpha_k\}) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-2ck\alpha_k}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mu(\{c^2|x|^2 \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k^2\}) &\leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \mathrm{e}^{-2k\alpha_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{ne}{k}\right)^k \mathrm{e}^{-2k\alpha_k} \\
&= \sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-k(2\alpha_k - \log\left(\frac{ne}{k}\right))}.
\end{aligned}$$

On choisit $\alpha_k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{ne}{k}\right) + \frac{t\sqrt{n}}{k}$. Ainsi,

$$\alpha_k^2 = \left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{ne}{k}\right) + \frac{t\sqrt{n}}{k}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\log^2\left(\frac{ne}{k}\right) + \frac{2t^2 n}{k^2}.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^n \frac{2t^2 n}{k} \leq t^2 n \frac{\pi^2}{3}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log^2\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \log^2\left(\frac{k}{n}\right) \\
&\leq \int_{\frac{1}{n}}^1 (\log(t))^2 \,\mathrm{d}t \\
&= [t\log^2(t)]_{\frac{1}{n}}^1 - 2\int_{\frac{1}{n}}^1 \log(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{n}\log^2\left(\frac{1}{n}\right) - 2\frac{\log(n)}{n} - \frac{2}{n} + 2 \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Si l'on suppose $t \geq 2$, alors $t^2 \geq 4$ et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log^2\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{t^2}{2}.$$

Par conséquent,
$$\sum_{k=1}^{n} \log^2\left(\frac{k}{n}\right) \leq n\frac{t^2}{2}.$$
Finalement, pour tout $t \geq 2$
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \leq 4nt^2.$$
Donc,
$$\begin{aligned} \mu(\{c^2|x|^2 \geq 4nt^2\}) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k(2\alpha_k - \log(\frac{ne}{k}))} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k(\log(\frac{ne}{k}) + \frac{2t\sqrt{n}}{k} - \log(\frac{ne}{k}))} \\ &= n\mathrm{e}^{-2t\sqrt{n}}. \end{aligned}$$
En posant $u = 2t \geq 4$, alors pour tout $u \geq 4$
$$\mu(\{\frac{c|x|}{\sqrt{n}} \geq u\}) \leq n\mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}.$$
En utilisant le fait que pour tous $n \geq 1$ et $u \geq 4$ on a
$$n \leq \mathrm{e}^{\frac{u\sqrt{n}}{2}}.$$
Alors on obtient,
$$n\mathrm{e}^{-u\sqrt{n}} \leq \mathrm{e}^{\frac{u\sqrt{n}}{2}}\mathrm{e}^{-u\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-\frac{u\sqrt{n}}{2}}.$$
Finalement, pour tout $u \geq 4$,
$$\mu(\{\frac{c|x|}{\sqrt{n}} \geq u\}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u\sqrt{n}}.$$

□

Par exemple, en prenant $u = 4$,
$$\mu(\{|x| \geq 4\mathrm{e}\sqrt{6}\sqrt{n}\}) \leq \mathrm{e}^{-2\sqrt{n}}.$$

3.8 Inégalités de grandes déviations pour les fonctions linéaires

3.8.1 Cas de la direction principale

Si on considère la fonction linéaire
$$f : x \mapsto \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}$$

alors,

$$\|f\|_{L^2(K)}^2 = \int_K \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{n} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_K x_1^2 + \cdots + x_n^2 \,\mathrm{d}x = L_K^2.$$

Ainsi, la norme $L^2(K)$ de f est exactement L_K.

Pour la fonction explicite f définie ci-dessus, on peut améliorer cette estimation, ce qui est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.8.1. *$\|f\|_{\psi_2(K)} \leq C$ pour une constante C universelle.*

La preuve nécessite des informations sur la répartition de la norme euclidienne d'un point x sur K, nous aurons donc besoin de la proposition 3.7.1.

Nous allons démontrer le théorème 3.8.1 dans le cas plus général des mesures de probabilité log-concaves vérifiant les propriétés 1) à 3) du début de la section « généralisation aux mesures de probabilité log-concaves ». La démonstration se fait en deux étapes. Tout d'abord, on examine les t tels que $0 \leq t \leq Cn^{\frac{1}{4}}$, puis les t tels que $t \geq Cn^{\frac{1}{4}}$, pour une constante universelle C.

Le théorème est équivalent (cf. théorème C.1.5) au fait que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |f(x)| \geq t\}) \leq A\mathrm{e}^{-bt^2}$$

où A et b sont des constantes universelles.

Lemme 3.8.2. *Pour tout nombre $C \geq 56$, dans l'intervalle $0 \leq t \leq Cn^{\frac{1}{4}}$,*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \left|\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}\right| \geq t\}) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8C^{\frac{4}{3}}}}.$$

Démonstration. On applique l'inégalité de Bernstein (cf. proposition A.1.8),

$$\mathbb{P}_\varepsilon(\{|f(x,\varepsilon)| \geq t\}) = \mathbb{P}_\varepsilon(\{|\sum_{k=1}^n x_k\varepsilon_k| \geq t\sqrt{n}\}) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2|x|^2}}.$$

Par conséquent, par l'hypothèse d'inconditionnalité,

$$\begin{aligned}
\mu(\{\frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{k=1}^n x_k| \geq t\}) &= \mu \otimes \mathbb{P}_\varepsilon(\{\frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{k=1}^n x_k\varepsilon_k| \geq t\}) \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2|x|^2}} \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\{|x| \leq t_0\sqrt{n}\}} 2\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2|x|^2}} \,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{\{|x| \geq t_0\sqrt{n}\}} 2\mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2|x|^2}} \,\mathrm{d}\mu(x)
\end{aligned}$$

pour un certain t_0 que nous choisirons plus tard. La majoration de l'intégrale de gauche est facile à obtenir en utilisant le fait que $|x| \leq t_0\sqrt{n}$, donc

$$\begin{aligned} |x|^2 &\leq t_0^2 n \\ -\frac{1}{|x|^2} &\leq -\frac{1}{t_0^2 n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\{|x|\leq t_0\sqrt{n}\}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2|x|^2}}\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{\{|x|\leq t_0\sqrt{n}\}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2}\frac{1}{t_0^2 n}}\,\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2t_0^2}}.$$

Pour l'intégrale de droite, on écrit

$$\int_{\{|x|\geq t_0\sqrt{n}\}} \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2|x|^2}}\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{\{|x|\geq t_0\sqrt{n}\}} \mathrm{d}\mu(x) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \frac{|x|}{\sqrt{n}} \geq t_0\}).$$

Puis, on applique la proposition 3.7.1 qui nous dit que pour tout $t \geq 4$,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \frac{c|x|}{\sqrt{n}} \geq t\}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t\sqrt{n}}.$$

En prenant $t = t_0 c \geq 4$, on obtient

$$\mu(\{\frac{|x|}{\sqrt{n}} \geq t_0\}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ct_0\sqrt{n}}.$$

Or, dans le cas général $c = \frac{1}{\mathrm{e}\sqrt{6}}$, ce qui nous impose $t_0 \geq 4\mathrm{e}\sqrt{6}$. Nous prendrons $t_0 \geq 28$ en minorant c par $\frac{1}{7}$. Donc,

$$\mu(\{\frac{|x|}{\sqrt{n}} \geq t_0\}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}ct_0\sqrt{n}} \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{14}t_0\sqrt{n}}.$$

D'autre part, l'hypothèse $0 \leq t \leq Cn^{\frac{1}{4}}$ nous conduit à

$$\begin{aligned} t^2 &\leq C^2\sqrt{n} \\ -\sqrt{n} &\leq -\frac{t^2}{C^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu(\{\frac{|x|}{\sqrt{n}} \geq t_0\}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{14}t_0\sqrt{n}} \leq \mathrm{e}^{-\frac{t_0 t^2}{14C^2}}.$$

Par conséquent,

$$\mu(\{|f(x)| \geq t\}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2t_0^2}} + \mathrm{e}^{-\frac{t_0 t^2}{14C^2}}.$$

On veut mettre sous la forme

$$\mu(\{|f(x)| \geq t\}) \leq A\mathrm{e}^{-bt^2}$$

où A et b sont des constantes universelles. Donc, on cherche t_0 (qui nous sert à découper l'intervalle) tel que

$$\frac{1}{2t_0^2} = \frac{t_0}{14C^2}.$$

Cela nous mène à

$$\begin{aligned} 2t_0^3 &= 14C^2 \\ t_0 &= (7C^2)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Pour un tel choix de t_0, on obtient

$$e^{-\frac{t^2}{2t_0^2}} = e^{-\frac{t_0 t^2}{14C^2}} = e^{-\frac{t^2}{14C^2}(7C^2)^{\frac{1}{3}}} = e^{-\frac{7^{\frac{1}{3}}}{14}\frac{t^2}{C^{\frac{4}{3}}}} \leq e^{-\frac{t^2}{8C^{\frac{4}{3}}}}.$$

Par ailleurs, l'hypothèse sur t_0 nous mène à

$$\begin{aligned} t_0 &\geq 28 \\ (7C^2)^{\frac{1}{3}} &\geq 28 \\ C &\geq \frac{28^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{7}} = 56. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mu(\{|f(x)| \geq t\}) \leq 4e^{-\frac{t^2}{8C^{\frac{4}{3}}}}$$

où $C \geq 56$ et $0 \leq t \leq Cn^{\frac{1}{4}}$.

□

Pour le cas $t \geq Cn^{\frac{1}{4}}$, la démonstration est beaucoup plus technique. On consultera [BOB-NAZ1] pour plus de détails. D'ailleurs ce résultat est démontré d'une manière plus générale dans [BOB-NAZ2], comme nous allons le voir dans la suite.

3.8.2 Cas général

Nous étudions les grandes déviations des fonctions linéaires dans un corps convexe K inconditionnel, en position isotrope et de volume 1. Pour un tel ensemble K, la fonction linéaire

$$f_\theta = \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n$$

où $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ vérifie $\|f_\theta\|_{L^2(K)} = L_K$. De plus, grâce au lemme de Borell, la norme $L^p(K)$ de f_θ est au plus Cp, pour tout $p \geq 1$ et C universelle. A une constante universelle près, cette propriété est équivalente à l'inégalité $\|f_\theta\|_{\psi_1(K)} \leq C\|f_\theta\|_{L^2(K)}$ pour la norme de Orlicz de f_θ correspondant à la fonction de Young $\psi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{|t|} - 1$. Pour plus de détails, on se rapportera aux annexes.

Une question naturelle est de généraliser ce résultat en se demandant, toujours à partir des hypothèses sur K, comment déterminer si possible, pour la plupart des vecteurs unitaires θ, une plus forte inégalité du style

$$\|f_\theta\|_{\psi_2(K)} \leq C_2.$$

Cette inégalité est équivalente à la propriété que les queues de répartition de f_θ admettent une borne gaussienne (cf. théorème C.1.5),

$$|\{x \in K\,;|f_\theta(x)| \geq t\}| \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{C}}$$

avec C proportionnel à C_2.

Dans l'article [BOB-NAZ1], il est montré que l'inégalité $\|f_\theta\|_{\psi_2(K)} \leq C_2$ est toujours vraie dans la direction principale, c'est-à-dire pour la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n}}.$$

On suggère ici une différente approche de ce résultat, une approche plus générale, qui permet de considérer cette fois des fonctions linéaires f_θ quelconques, c'est-à-dire sans conditions a priori sur θ, et alors on étudie leur comportement sur K.

Théorème 3.8.3. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, $\|f_\theta\|_{\psi_2(K)} \leq 2\sqrt{3}\|\theta\|_\infty\sqrt{n}$, où l'on note $\|\theta\|_\infty = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |\theta_j|$.*

On remarque qu'en appliquant ce théorème à la fonction f ci-dessus, alors

$$\|f\|_{\psi_2(K)} \leq 2\sqrt{3}\|\theta\|_\infty\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = 2\sqrt{3}$$

car ici $\theta = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})$. Par ailleurs, la majoration est indépendante de la dimension. Ainsi, ce théorème démontre le théorème 3.8.1.

A une constante universelle près, la majoration de $\|f_\theta\|_{\psi_2(K)}$ ne peut pas être améliorée. On peut le montrer à l'aide de la proposition 3.8.9 ci-après, en considérant l'exemple de la boule $\mathcal{B}_1^n$ normalisée. D'autre part, la proposition 3.8.7 ci-après nous dit que la valeur moyenne de $\|\theta\|_\infty\sqrt{n}$ par rapport à la mesure uniforme σ_{n-1} de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ est de l'ordre de $\sqrt{\log(n)}$. Donc, on ne peut pas espérer que l'inégalité $\|f_\theta\|_{\psi_2(K)} \leq C_2$ restera valable pour la plupart des vecteurs unitaires θ au sens de σ_{n-1}, donc d'autre normes ou estimations de la répartition des queues doivent être examinées pour décrire le plus mauvais comportement des fonctions linéaires sur K. Ce qui nous amène au théorème suivant.

Théorème 3.8.4. *Il existe des constantes universelles c_1, c_2, t_0 positives telles que pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, sauf éventuellement pour un ensemble de mesure σ_{n-1} au plus n^{-c_1} et pour tout $t \geq t_0$,*

$$|\{x \in K\,;|f_\theta(x)| \geq t\}| \leq \mathrm{e}^{-c_2 \frac{t^2}{\log(t)}}.$$

De plus, c_1 peut être choisi arbitrairement grand au dépend de convenables c_2 et t_0.

Donc, dans le pire des cas, les queues de f_θ sont « presque » gaussiennes. En particulier, pour la plupart des vecteurs unitaires, nous avons une version plus faible de $\|f_\theta\|_{\psi_2(K)} \leq C_2$,

$$\|f_\theta\|_{\psi_\alpha(K)} \leq C_\alpha$$

où $\alpha \in [1, 2[$ et C_α ne dépend que de α.

Lemme 3.8.5. *Pour tout $t \geq 0$,*

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \leq \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s \leq \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t}.$$

Démonstration. Soit $t \geq 0$. Alors,

$$\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s \leq \int_t^{+\infty} \frac{s}{t}\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\right]_t^{+\infty} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t}.$$

D'autre part,

$$\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s = \int_t^{+\infty} \frac{s\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}}{s}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}}{s}\right]_t^{+\infty} - \int_t^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}}{s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t} - \int_t^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}}{s^2}\,\mathrm{d}s$$

et,

$$\int_t^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}}{s^2}\,\mathrm{d}s \leq \int_t^{+\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^3 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}}{s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{t^3}\int_t^{+\infty} s\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t^3}.$$

Donc,

$$\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}\,\mathrm{d}s \geq \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right).$$

□

Proposition 3.8.6. *La quantité*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty \,\mathrm{d}\gamma_n(x)$$

est de l'ordre de $\sqrt{\log(n)}$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi gaussienne standard.

Démonstration. Soit $q \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty \,\mathrm{d}\gamma_n(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{d}\gamma_n(x) \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n |x_i|^q \,\mathrm{d}\gamma_n(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq n^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x_1|^q \,\mathrm{d}\gamma_n(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq n^{\frac{1}{q}} 2\sqrt{q}.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\left(\frac{|x_1|}{2}\right)^2} \mathrm{d}\gamma_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{x_1^2}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{(\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{2}} \,\mathrm{d}x \leq 2.$$

Donc, $x \mapsto |x_1|$ est $\psi_2(\gamma_n)$ et $\|x \mapsto |x_1|\|_{\psi_2(\gamma_n)} \leq 2$.

Ensuite, on prend $q = \log(n)$ et on obtient,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty \,\mathrm{d}\gamma_n(x) \leq 2n^{\frac{1}{\log(n)}} \sqrt{\log(n)} = 2\mathrm{e}\sqrt{\log(n)}.$$

Pour la minoration, on utilise l'inégalité de Markov. Pour tout $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty \,\mathrm{d}\gamma_n(x) \geq t\gamma_n(\|x\|_\infty \geq t) = t(1 - \gamma_n(t\mathcal{B}_\infty^n)).$$

Or, en considérant $t \geq 2$, et en utilisant le lemme 3.8.5,

$$\gamma_1([-t;t]) = 1 - \gamma_1(|x| > t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{-s^2}{2}} \mathrm{d}s \leq 1 - \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \leq 1 - \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{10t}$$

Ainsi, en choisissant $t = c\sqrt{\log(n)}$, où $c > 0$ est une constante universelle,

$$\begin{aligned}
\gamma_n([-t;t]^n) &\leq \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{10t}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-\frac{c^2\log(n)}{2}}}{10c\sqrt{\log(n)}}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{10c\sqrt{\log(n)}n^{\frac{c^2}{2}}}\right)^n \\
&= \mathrm{e}^{n\log\left(1 - \frac{1}{10c\sqrt{\log(n)}n^{\frac{c^2}{2}}}\right)} \\
&\leq \mathrm{e}^{-\frac{n}{10c\sqrt{\log(n)}n^{\frac{c^2}{2}}}}.
\end{aligned}$$

Or, si $\frac{c^2}{2} < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n}{10c\sqrt{\log(n)}n^{\frac{c^2}{2}}}} = 0.$$

Ainsi, en prenant $0 < c < \sqrt{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\gamma_n([-c\sqrt{\log(n)}; c\sqrt{\log(n)}]^n) \leq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante universelle $c > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty \,\mathrm{d}\gamma_n(x) \geq \frac{c\sqrt{\log(n)}}{2}.$$

$\square$

Proposition 3.8.7. *La quantité*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\theta\|_\infty \,\mathrm{d}\theta$$

est de l'ordre de $\frac{\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}}$.

Démonstration. On note v_n le volume de la boule $\mathcal{B}_2^n$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty \,\mathrm{d}\gamma_n(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{+\infty} \|r\theta\|_\infty r^{n-1} n v_n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\theta\|_\infty \,\mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \,\mathrm{d}r \frac{n v_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} \,\mathrm{d}r \frac{n v_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} &= \int_0^{+\infty} (2s)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{e}^{-s} \,\mathrm{d}s \frac{n v_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\
&= 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) \frac{n v_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{1}{2} n \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est de l'ordre de $\sqrt{n}$. Par ailleurs, d'après la proposition 3.8.6, la quantité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_\infty \,\mathrm{d}\gamma_n(x)$$

est de l'ordre de $\sqrt{\log(n)}$. Finalement, la quantité

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|\theta\|_\infty \,\mathrm{d}\theta$$

est de l'ordre de $\frac{\sqrt{\log(n)}}{\sqrt{n}}$.

□

On sait, d'après [BOB-NAZ1] que les hypothèses sur K entraînent l'inclusion

$$K \subset Cn\mathcal{B}_1^n$$

pour une constante universelle C (cf. corollaire 3.4.2). Ce fait en lui-même inspire l'idée qu'un nombre de propriétés essentielles de K peuvent être héritées de la dilatation de la boule $\mathcal{B}_1^n$.

Fonctions linéaires dans la boule $\mathcal{B}_1^n$

On se place dans l'ensemble $\mathcal{B}_1^n$, la boule unité de la norme ℓ_1^n, et on le muni de la loi uniforme que nous noterons μ_n. Etant donné que $|\mathcal{B}_1^n| = \frac{2^n}{n!}$, alors la mesure μ_n a pour densité de probabilité

$$\mathrm{d}\mu_n = \frac{n!}{2^n}\mathbf{1}_{\mathcal{B}_1^n}(x)\mathrm{d}x$$

définie sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.8.8 (Formule du multinôme)**.** *Soient N un entier positif et k un entier strictement positif. Soient $a_1, \ldots, a_k$ des réels. Alors,*

$$(a_1 + \cdots + a_k)^N = \sum_{n_1+\cdots+n_k=N} \frac{N!}{n_1! \ldots n_k!} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k = 1$, c'est clair et pour $k = 2$ c'est la formule du binôme. On suppose que

$$(a_1 + \cdots + a_k)^N = \sum_{n_1+\cdots+n_k=N} \frac{N!}{n_1! \ldots n_k!} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k}.$$

Alors, en posant $p_1 = a_1 + \cdots + a_k$,

$$\begin{aligned}
(p_1 + a_{k+1})^N &= \sum_{p_1+n_{k+1}=N} \frac{N!}{p_1! n_{k+1}!}(a_1 + \cdots + a_k)^{p_1} a_{k+1}^{n_{k+1}} \\
&= \sum_{p_1+n_{k+1}=N} \frac{N!}{p_1! n_{k+1}!}\left(\sum_{n_1+\cdots+n_k=p_1} \frac{p_1!}{n_1! \ldots n_k!} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k} \right) a_{k+1}^{n_{k+1}} \\
&= \sum_{n_1+\cdots+n_k+n_{k+1}=N} \frac{N!}{n_1! \ldots n_k! n_{k+1}!} a_1^{n_1} \ldots a_k^{n_k} a_{k+1}^{n_{k+1}}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.8.9. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$,*

$$\frac{c_1 \|\theta\|_\infty}{\sqrt{n}} \leq \|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_n)} \leq \frac{c_2 \|\theta\|_\infty}{\sqrt{n}}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes universelles. On peut prendre $c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et $c_2 = 2\sqrt{2}$.

Démonstration. Dans un premier temps, nous nous occupons de la majoration. Soit $q \geq 1$ un entier, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\theta|^{2q} \,\mathrm{d}\mu_n = \frac{n!}{2^n} \int_{\mathcal{B}_1^n} (\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n)^{2q} \,\mathrm{d}x.$$

Or, l'ensemble $\mathcal{B}_1^n$ est inconditionnel, donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, pour toute fonction f μ_n-intégrable définie sur $e_i^\perp$,

$$\int_{\mathcal{B}_1^n} x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Ainsi, d'après la formule du multinôme (cf. lemme 3.8.8),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_\theta|^{2q} \,\mathrm{d}\mu_n &= \frac{n!}{2^n} \int_{\mathcal{B}_1^n} \sum_{q_1 + \cdots + q_n = 2q} \frac{(2q)!}{q_1! \ldots q_n!} (\theta_1 x_1)^{q_1} \ldots (\theta_n x_n)^{q_n} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{n!}{2^n} \int_{\mathcal{B}_1^n} \sum_{2q_1 + \cdots + 2q_n = 2q} \frac{(2q)!}{(2q_1)! \ldots (2q_n)!} (\theta_1 x_1)^{2q_1} \ldots (\theta_n x_n)^{2q_n} \mathrm{d}x \\
&= n! \sum_{q_1 + \cdots + q_n = q} \frac{(2q)!}{(2q_1)! \ldots (2q_n)!} \theta_1^{2q_1} \ldots \theta_n^{2q_n} \int_{\Delta_n} x_1^{2q_1} \ldots x_n^{2q_n} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

où $\Delta_n = \{x \in (\mathbb{R}_+)^n\,;\, x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$. D'après le lemme E.1.1,

$$\int_{\Delta_n} x_1^{2q_1} \ldots x_n^{2q_n} \,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(2q_1 + 1) \ldots \Gamma(2q_n + 1)}{\Gamma(2q_1 + \cdots + 2q_n + n + 1)} = \frac{(2q_1)! \ldots (2q_n)!}{(2q + n)!}.$$

Finalement,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\theta|^{2q} \,\mathrm{d}\mu_n = \frac{(2q)! n!}{(2q + n)!} \sum_{q_1 + \cdots + q_n = q} \theta_1^{2q_1} \ldots \theta_n^{2q_n}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f_\theta|^{2q}\,\mathrm{d}\mu_n &= \frac{n!(2q)!}{(n+2q)!}\sum_{q_1+\cdots+q_n=q}\theta_1^{2q_1}\ldots\theta_n^{2q_n} \\
&\le \frac{n!(2q)!}{(n+2q)!}\|\theta\|_\infty^{2q}\sum_{q_1+\cdots+q_n=q} 1 \\
&= \frac{n!(2q)!}{(n+2q)!}\|\theta\|_\infty^{2q}\binom{n+q-1}{n-1} \\
&= \|\theta\|_\infty^{2q}\frac{n!(2q)!}{(n+2q)!}\frac{(n+q-1)!}{(n-1)!q!} \\
&= \|\theta\|_\infty^{2q} nq!\binom{2q}{q}\frac{(n+q-1)!}{(n+2q)!} \\
&= \frac{\|\theta\|_\infty^{2q} nq!\binom{2q}{q}}{(n+2q)\ldots(n+q)}.
\end{aligned}$$

Or, dans le produit $(n+2q)\ldots(n+q)$, il y a $q+1$ termes qui sont tous plus grand que n, d'où

$$\frac{n^{q+1}}{(n+2q)\ldots(n+q)} \le 1.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\theta|^{2q}\,\mathrm{d}\mu_n \le \frac{\|\theta\|_\infty^{2q} q!\binom{2q}{q}}{n^q} \le \frac{\|\theta\|_\infty^{2q} q!4^q}{n^q}$$

car, par récurrence, pour tout $q \ge 0$, $\binom{2q}{q} \le 4^q$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{(\lambda f_\theta)^2}\,\mathrm{d}\mu_n &= \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{q\ge 0}\frac{(\lambda f_\theta)^{2q}}{q!}\,\mathrm{d}\mu_n \\
&= \sum_{q\ge 0}\frac{\lambda^{2q}}{q!}\int_{\mathbb{R}^n} f_\theta^{2q}\,\mathrm{d}\mu_n \\
&\le \sum_{q\ge 0}\frac{\lambda^{2q}}{q!}\frac{\|\theta\|_\infty^{2q} q!4^q}{n^q} \\
&= \sum_{q\ge 0}\lambda^{2q}\|\theta\|_\infty^{2q}4^q n^{-q} \\
&= \frac{1}{1-\lambda^2\|\theta\|_\infty^2 4n^{-1}}
\end{aligned}$$

à condition que $\lambda^2\|\theta\|_\infty^2 4n^{-1} < 1$, ce qui est vrai pour

$$|\lambda| < \frac{\sqrt{n}}{2\|\theta\|_\infty}.$$

On a donc l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{(\lambda f_\theta)^2}\,\mathrm{d}\mu_n \leq 2$$

lorsque

$$\frac{1}{1-\lambda^2\|\theta\|_\infty^2 4n^{-1}} = 2.$$

Autrement dit lorsque

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}\|\theta\|_\infty} < \frac{\sqrt{n}}{2\|\theta\|_\infty}.$$

Donc, par définition des normes de Orlicz,

$$\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_n)} \leq \frac{2\sqrt{2}\|\theta\|_\infty}{\sqrt{n}}.$$

On a donc la majoration avec $c_2 = 2\sqrt{2}$.

Procédons maintenant à la minoration. Puisque les quantités sont élevées au carré, on suppose que pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\theta_j \geq 0$. D'après l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_\theta|^{2q}\,\mathrm{d}\mu_n = \frac{n!(2q)!}{(n+2q)!}\sum_{q_1+\cdots+q_n=q}\theta_1^{2q_1}\ldots\theta_n^{2q_n}$$

les fonctions $\theta \mapsto \|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_n)}$ sont croissantes en chaque coordonnée sur $(\mathbb{R}_+)^n$ et donc il en est de même pour les fonctions $\theta \mapsto \|f_\theta\|_{\psi^2(\mu_n)}$. Par conséquent,

$$\|f_\theta\|_{\psi^2(\mu_n)} \geq \|\theta\|_\infty \|f_{e_1}\|_{\psi^2(\mu_n)}.$$

Par définition,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\left(\frac{|f_{e_1}|}{\|f_{e_1}\|_{\psi^2(\mu_n)}}\right)^2}\,\mathrm{d}\mu_n \leq 2.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\left(\frac{|f_{e_1}|}{\|f_{e_1}\|_{\psi^2}}\right)^2}\mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\frac{|f_{e_1}|}{\|f_{e_1}\|_{\psi^2}}\right)^{2n}\mathrm{d}\mu_n \geq \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f_{e_1}|}{\|f_{e_1}\|_{\psi^2}}\right)^{2n}\mathrm{d}\mu_n.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2n!}\int_{\mathbb{R}_n} |f_{e_1}|^{2n}\,\mathrm{d}\mu_n \leq \|f_{e_1}\|_{\psi^2(\mu_n)}^{2n}.$$

Or,

$$\frac{1}{2n!}\int_{\mathbb{R}_n} |f_{e_1}|^{2n}\,\mathrm{d}\mu_n = \frac{1}{2n!}\frac{n!(2n)!}{(3n)!} = \frac{(2n)!}{2(3n)!} = \frac{1}{2(3n)\ldots(2n+1)} \geq \frac{1}{2(3n)^n}.$$

Par conséquent,

$$\|f_{e_1}\|_{\psi^2(\mu_n)}^{2n} \geq \frac{1}{2(3n)^n}.$$

Finalement,

$$\|f_{e_1}\|_{\psi^2(\mu_n)} \geq \frac{1}{\sqrt{6n}}.$$

De tout ceci, on obtient que

$$\|f_\theta\|_{\psi^2(\mu_n)} \geq \|\theta\|_\infty \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On obtient donc la minoration avec $c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

□

Cette proposition nous donne des informations sur la norme $L^p(\mu_n)$ de la fonction f_θ.

Corollaire 3.8.10. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$, la norme $L^p(\mu_n)$ de f_θ vérifie*

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq 4\sqrt{2}\|\theta\|_\infty \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Démonstration. Par équivalence des normes $L^p(\mu_n)$ et $\psi_2(\mu_n)$,

$$\frac{\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)}}{\sqrt{p}} \leq \sup_{p\geq 1} \frac{\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)}}{\sqrt{p}} \leq 2\|f_\theta\|_{\psi^2(\mu_n)} \leq \frac{4\sqrt{2}\|\theta\|_\infty}{\sqrt{n}}.$$

Par conséquent,

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq 4\sqrt{2}\|\theta\|_\infty \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

□

Maintenant, on va essayer d'affaiblir la majoration de la norme $L^{2q}(\mu_n)$ de f_θ utilisée lors de la démonstration de la proposition 3.8.9, c'est-à-dire que nous avons besoin d'une estimation plus précise que la majoration brutale $\theta_i \leq \|\theta\|_\infty$.

Soit $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Pour $n \geq 2$, on pose

$$C_n(\theta) = \|\theta\|_\infty \sqrt{\frac{n}{\log(n)}}.$$

Ainsi, $C_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\log(n)}}$ dans les directions principales. Cependant, nous avons vu que cette quantité est de l'ordre de 1 lorsque θ est aléatoirement choisi par rapport à la loi uniforme σ_{n-1} sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$.

Soit un entier $q \geq 1$, on considère le polynôme définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$ par

$$P_q(a) = \sum_{q_1+\cdots+q_n=q} a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n}.$$

Lemme 3.8.11. *Pour tout entier $q \geq 1$ et tout $a \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, le polynôme $P_q(a)$ vérifie*

$$P_q(a) \leq \left(2\mathrm{e}\max\{\frac{1}{q}, \|a\|_\infty\}\right)^q.$$

Démonstration. Dans un premier temps, on suppose que $a_i \leq \frac{1}{2}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si on étudie la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}(1-x) - 1$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$, alors

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}(1-x) - \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}(1-2x) \geq 0.$$

Donc, f est croissante, mais $f(0) = 0$, donc f est positive. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{1}{1-a_i} \leq \mathrm{e}^{2a_i}.$$

Il s'ensuit que

$$P_q(a) = \sum_{q_1+\cdots+q_n=q} a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n} \leq \sum_{q_i \geq 0} a_1^{q_1} \ldots a_n^{q_n} = \frac{1}{(1-a_1)\ldots(1-a_n)} \leq \mathrm{e}^{2\|a\|_{\ell_1^n}}.$$

En appliquant cette estimation au vecteur ta au lieu de a et en supposant que $\|a\|_{\ell_1^n} = 1$, nous obtenons, à condition que pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 \leq ta_i \leq \frac{1}{2}$,

$$P_q(ta) = \sum_{q_1+\cdots+q_n=q} (ta_1)^{q_1} \ldots (ta_n)^{q_n} = t^q P_q(a) \leq \mathrm{e}^{2\|ta\|_{\ell_1^n}} = \mathrm{e}^{2t}.$$

La condition sur t est vérifiée lorsque $0 < t < \frac{1}{2\|a\|_\infty}$ puisque pour tout $1 \leq i \leq n$, $\frac{1}{\|a\|_\infty} \leq \frac{1}{a_i}$. Etudions alors la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2\|a\|_\infty}]$ par $t \mapsto \phi(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{t^q}$, où $q \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\phi'(t) = \frac{2\mathrm{e}^{2t}t^q - q\mathrm{e}^{2t}t^{q-1}}{t^{2q}} = \frac{\mathrm{e}^{2t}t^{q-1}(2t-q)}{t^{2q}}.$$

Ainsi,

$$\phi'(t) \geq 0 \Longleftrightarrow 2t - q \geq 0 \Longleftrightarrow t \geq \frac{q}{2}.$$

Par conséquent, si $\frac{1}{2\|a\|_\infty} \leq \frac{q}{2}$, alors

$$\min_{t \in [0, \frac{1}{2\|a\|_\infty}]} \phi(t) = \phi\left(\frac{1}{2\|a\|_\infty}\right) = (2\|a\|_\infty)^q \mathrm{e}^{\frac{1}{\|a\|_\infty}} \leq (2\|a\|_\infty)^q \mathrm{e}^q.$$

Si $\frac{1}{2\|a\|_\infty} \geq \frac{q}{2}$, alors

$$\min_{t \in [0, \frac{1}{2\|a\|_\infty}]} \phi(t) = \phi\left(\frac{q}{2}\right) = \left(\frac{2\mathrm{e}}{q}\right)^q.$$

Finalement,

$$P_q(a) \le \begin{cases} \left(\frac{2\mathrm{e}}{q}\right)^q & \text{si } \|a\|_\infty \le \frac{1}{q} \\ (2\mathrm{e}\|a\|_\infty)^q & \text{si } \|a\|_\infty \ge \frac{1}{q} \end{cases}$$

Autrement dit,

$$P_q(a) \le \left(2\mathrm{e} \max\{\frac{1}{q}, \|a\|_\infty\}\right)^q.$$

□

Proposition 3.8.12. *Sur l'espace probabilisé $(\mathcal{B}_1^n, \mu_n)$, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ et tout réel $p \ge 1$,*

$$n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \le C \max\{\sqrt{p}, C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)}\}$$

où C est une constante universelle. On peut prendre $C = \frac{4}{\sqrt{\log(2)}}$.

Démonstration. On applique le lemme 3.8.11 avec pour tout $1 \le i \le n$, $a_i = \theta_i^2$, d'où, pour tout entier $q \ge 1$,

$$\|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_n)}^{2q} \le \frac{n!(2q)!}{(n+2q)!} \left(2\mathrm{e} \max\{\frac{1}{q}, \|a\|_\infty\}\right)^q.$$

En utilisant le fait que $(n+2q)! \ge n!n^{2q}$ et $(2q)! \le (2q)^{2q}$, on obtient

$$\|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_n)}^{2q} \le \frac{n!(2q)^{2q}}{n!n^{2q}} \left(2\mathrm{e} \max\{\frac{1}{q}, \|a\|_\infty\}\right)^q.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_n)} &\le \frac{2q}{n}\sqrt{2\mathrm{e}} \max\{\frac{1}{\sqrt{q}}, \sqrt{\|a\|_\infty}\} \\ n\|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_n)} &\le 2\sqrt{2\mathrm{e}} \max\{\sqrt{q}, q\sqrt{\|a\|_\infty}\}. \end{aligned}$$

A partir de là, on considère un réel $p \ge 2$ et on prend le plus petit entier q tel que $p \le 2q$, d'où $q \le p$. Par croissance des normes $L^p(\mu_n)$, on obtient

$$\begin{aligned} n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} &\le n\|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_n)} \\ &\le 2\sqrt{2\mathrm{e}} \max\{\sqrt{q}, q\sqrt{\|a\|_\infty}\} \\ &\le 2\sqrt{2\mathrm{e}} \max\{\sqrt{p}, p\sqrt{\|a\|_\infty}\} \\ &= 2\sqrt{2\mathrm{e}} \max\{\sqrt{p}, C_n(\theta)p\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\} \end{aligned}$$

car

$$\sqrt{\|a\|_\infty} = \sqrt{\max_{1\le i\le n}(|\theta_i|^2)} = \sqrt{\left(\max_{1\le i\le n}(|\theta_i|)\right)^2} = \|\theta\|_\infty.$$

En effet, si $|\theta_j| = \max_i(|\theta_i|)$, alors pour tout i, $|\theta_i| \leq |\theta_j|$ donc pour tout i, $|\theta_i|^2 \leq |\theta_j|^2$. Ainsi, $|\theta_j|^2 = \max_i(|\theta_i|^2)$. D'autre part, $|\theta_j| = \max_i(|\theta_i|)$, donc $|\theta_i|^2 = (\max_i(|\theta_i|))^2$.

Maintenant, on suppose que $2 \leq p \leq n$. On a besoin d'étudier la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $t \mapsto \phi(t) = \frac{\log(t)}{t}$. Alors, $\phi'(t) = \frac{1-\log(t)}{t^2}$, d'où $\phi'(t) \geq 0$ si et seulement si $t \leq \mathrm{e}$. Donc, si $p \geq 3$, on a toujours $\frac{\log(n)}{n} \leq \frac{\log(p)}{p}$. Si $2 \leq p \leq 3$, alors $\frac{\log(2)}{2} \leq \frac{\log(p)}{p} \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$. Et puisque $\frac{\log(n)}{n} \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$, alors

$$\frac{\log(n)}{n} \leq \frac{1}{\mathrm{e}} \frac{\frac{\log(p)}{p}}{\frac{\log(2)}{2}} = \frac{2}{\mathrm{e}\log(2)} \frac{\log(p)}{p}.$$

Ainsi, pour tout $2 \leq p \leq n$,

$$\begin{aligned} n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} &\leq 2\sqrt{2\mathrm{e}}\max\{\sqrt{p}, C_n(\theta)p\sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}\log(2)}\frac{\log(p)}{p}}\} \\ &= 2\sqrt{2\mathrm{e}}\max\{\sqrt{p}, \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}\log(2)}}C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)}\} \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\log(2)}}\max\{\sqrt{p}, C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)}\}. \end{aligned}$$

Pour $p \geq n$, on utilise la croissance des normes $L^p(\mu_n)$ pour dire

$$n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq n\|f_\theta\|_{L^\infty(\mu_n)} = n\|\theta\|_\infty = C_n(\theta)\sqrt{n\log(n)} \leq C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)}.$$

Donc,

$$n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)} \leq \frac{4}{\sqrt{\log(2)}}\max\{\sqrt{p}, C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)}\}.$$

On utilise le fait que $\|f_\theta\|_{L^\infty(\mu_n)} = \|\theta\|_\infty$. En effet, soit $x \in \mathcal{B}_1^n$, alors

$$|f_\theta(x)| = |\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n| \leq \|\theta\|_\infty(|x_1| + \cdots + |x_n|) \leq \|\theta\|_\infty.$$

Par ailleurs, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|\theta_i| = \|\theta\|_\infty$, donc

$$|f_\theta(e_i)| = |\theta_i| = \|\theta\|_\infty.$$

Ainsi, $\|f_\theta\|_{L^\infty(\mu_n)} = \|\theta\|_\infty$.

Pour le cas $1 \leq p \leq 2$, on utilise encore la croissance des normes $L^p(\mu_n)$,

$$\begin{aligned}
n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} &\leq n\|f_\theta\|_{L^2(\mu_n)} \\
&= n\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f_\theta|^2 \, \mathrm{d}\mu_n} \\
&= n\sqrt{\frac{n!2!}{(n+2)!} \sum_{q_1+\cdots+q_n=1} \theta_1^{2q_1} \ldots \theta_n^{2q_n}} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}\|\theta\|_\infty n\sqrt{n}}{(n+2)(n+1)} \\
&\leq \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq \sqrt{2} \leq \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \max\{\sqrt{p}, C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)}\}.$$

Finalement, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ et tout réel $p \geq 1$,

$$n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq C \max\{\sqrt{p}, C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)}\}$$

où $C = \frac{4}{\sqrt{\log(2)}}$.

□

Cette proposition implique le corollaire 3.8.10 dans le cas où $p \in [1, n]$. En effet, puisque $p \in [1, n]$, alors

$$\begin{aligned}
n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} &\leq \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \sqrt{p} \max\{1, C_n(\theta)\sqrt{\log(p)}\} \\
&\leq \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \sqrt{p} \max\{1, C_n(\theta)\sqrt{\log(n)}\}.
\end{aligned}$$

Or, $C_n(\theta)\sqrt{\log(n)} = \|\theta\|_\infty\sqrt{n}$. Mais, puisque $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, alors il existe un entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\theta_i \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par conséquent, $\|\theta\|_\infty \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi,

$$\max\{1, C_n(\theta)\sqrt{\log(n)}\} = \|\theta\|_\infty\sqrt{n}.$$

Donc,

$$n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \|\theta\|_\infty \sqrt{p}\sqrt{n}.$$

Enfin,

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \|\theta\|_\infty \sqrt{\frac{p}{n}} \leq 4\sqrt{2}\|\theta\|_\infty \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

Corollaire 3.8.13. *Pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ et pour tout $p \geq 2$,*

$$n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} \leq \frac{4}{\log(2)} \max\{1, C_n(\theta)\}\sqrt{p\log(p)}.$$

Démonstration. Puisque $p \geq 2$, alors $\frac{1}{\sqrt{\log(p)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\log(2)}}$. Donc, en appliquant la proposition 3.8.12,

$$\begin{aligned} n\|f_\theta\|_{L^p(\mu_n)} &\leq \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \max\{\sqrt{p}, C_n(\theta)\sqrt{p\log(p)}\} \\ &= \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \max\{\frac{1}{\sqrt{\log(p)}}, C_n(\theta)\}\sqrt{p\log(p)} \\ &\leq \frac{4}{\log(2)} \max\{1, C_n(\theta)\}\sqrt{p\log(p)}. \end{aligned}$$

□

Fonctions linéaires dans K

Maintenant, on retourne au cas général, c'est-à-dire que l'on se donne un corps convexe K de $\mathbb{R}^n$ inconditionnel, en position isotrope et de volume 1. Comme nous l'avons déjà dit, parmi de tels corps convexes de $\mathbb{R}^n$, la boule $\mathcal{B}_1^n$ normalisée est l'ensemble le plus large. Plus précisément, nous avons toujours

$$K \subset \frac{\sqrt{6}}{2} n\mathcal{B}_1^n.$$

Dorénavant, on note $V = \frac{\sqrt{6}}{2} n\mathcal{B}_1^n$. On note μ_K et μ_V les lois uniformes respectivement sur K et V.

On considère l'ensemble $\mathcal{F}_n$ constitué des fonctions F définies sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que
1) F est inconditionnelle.
2) Il existe une mesure positive de Borel π, c'est-à-dire que π est finie sur tout compact, telle que pour tout $x \in (\mathbb{R}_+)^n$,

$$F(x) = \pi([0, x_1] \times \cdots \times [0, x_n]).$$

Si la mesure π est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la deuxième hypothèse sur F nous dit qu'il existe une fonction positive q définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$ telle que pour tout $x \in (\mathbb{R}_+)^n$,

$$F(x) = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant,

Théorème 3.8.14. *Si $F \in \mathcal{F}_n$, alors pour tout $t \geq 0$,*

$$\mu_K(\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, F(x) \geq t\}) \leq \mu_V(\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, F(x) \geq t\}).$$

En particulier,

$$\int F(x)\,\mathrm{d}\mu_K(x) \leq \int F(x)\,\mathrm{d}\mu_V(x).$$

Démonstration. Dans un premier temps, on prend pour F les fonctions de la forme

$$F_\alpha = \mathbf{1}_{\{|x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}}$$

qui correspond au cas où π est la mesure de dirac en α, où $\alpha \in (\mathbb{R}_+)^n$. On doit donc montrer que

$$\mu_K(\{|x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}) \leq \mu_V(\{|x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}).$$

On suppose que $\alpha \in K$, sinon $\mu_K(\{|x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}) = 0$ et alors le résultat sera toujours vrai. Il s'ensuit que $\alpha \in V$. Or, nous avons montré dans la proposition 3.4.1 que

$$\mu_K(\{|x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}) \leq \left(1 - \frac{2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\sqrt{6}n}\right)^n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mu_V(\{\forall i, |x_i| \geq \alpha_i\}) &= \frac{|\{x \in V \,;\, |x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}|}{|V|} \\
&= |\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \forall i, |x_i| \geq \alpha_i, \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \frac{\sqrt{6}}{2} n\}| \\
&= |\{z \in \mathbb{R}^n ; \forall i, |z_i| = |x_i| - \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n |z_i| \leq \frac{\sqrt{6}}{2} n - \sum_{i=1}^n \alpha_i\}| \\
&= \frac{|\left(\frac{\sqrt{6}n}{2} - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)\right) \mathcal{B}_1^n|}{|\frac{\sqrt{6}n}{2} \mathcal{B}_1^n|} \\
&= \left(\frac{\frac{\sqrt{6}n}{2} - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\frac{\sqrt{6}n}{2}}\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}{\sqrt{6}n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu_K(\{|x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}) \leq \mu_V(\{|x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}).$$

Nous avons donc démontré la proposition dans le cas des fonctions

$$F_\alpha = \mathbf{1}_{\{|x_1| \geq \alpha_1, \dots, |x_n| \geq \alpha_n\}}.$$

Il reste à appliquer le théorème de Krein-Milman au cône $\mathcal{F}_n$ dont l'ensemble des points extrémaux est exactement $\{F_\alpha\,;\,\alpha \in (\mathbb{R}_+)^n\}$.

En particulier, par Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,\mathrm{d}\mu_K(x) &= \int_0^{\sup(F)} \mu_K(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\,F(x) \geq t\})\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{\sup(F)} \mu_V(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\,F(x) \geq t\})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,\mathrm{d}\mu_V(x).\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.8.15. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ et pour tout entier $q \geq 0$,*

$$\int |f_\theta|^{2q}\,\mathrm{d}\mu_K \leq \int |f_\theta|^{2q}\,\mathrm{d}\mu_V.$$

Démonstration. On applique le théorème 3.8.14 aux fonctions de la forme

$$F(x) = |x_1|^{p_1} \ldots |x_n|^{p_n}$$

pour tout $p_1, \ldots, p_n \geq 0$, on obtient

$$\int |x_1|^{p_1} \ldots |x_n|^{p_n}\,\mathrm{d}\mu_K \leq \int |x_1|^{p_1} \ldots |x_n|^{p_n}\,\mathrm{d}\mu_V.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}\int |f_\theta|^{2q}\,\mathrm{d}\mu_K &= \sum_{q_1+\cdots+q_n=q} \frac{(2q)!}{(2q_1)!\ldots(2q_n)!}\theta_1^{2q_1}\ldots\theta_n^{2q_n}\int x_1^{2q_1}\ldots x_n^{2q_n}\,\mathrm{d}\mu_K(x) \\ &\leq \sum_{q_1+\cdots+q_n=q} \frac{(2q)!}{(2q_1)!\ldots(2q_n)!}\theta_1^{2q_1}\ldots\theta_n^{2q_n}\int x_1^{2q_1}\ldots x_n^{2q_n}\,\mathrm{d}\mu_V(x) \\ &= \int |f_\theta|^{2q}\,\mathrm{d}\mu_V.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.8.16. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_K)} \leq \|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_V)}.$$

Démonstration. On écrit,

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f_\theta|}{\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_V)}}\right)^2} \mathrm{d}\mu_K &= \int \sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!} \left(\frac{|f_\theta|}{\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_V)}}\right)^{2q} \mathrm{d}\mu_K \\
&\leq \int \sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!} \left(\frac{|f_\theta|}{\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_V)}}\right)^{2q} \mathrm{d}\mu_V \\
&= \int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f_\theta|}{\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_V)}}\right)^2} \mathrm{d}\mu_V \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_K)} \leq \|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_V)}.$$

□

Démonstration du théorème 3.8.3. D'après le corollaire 3.8.16,

$$\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_K)} \leq \|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_V)}.$$

Puisque $V = \frac{\sqrt{6}}{2} n \mathcal{B}_1^n$,

$$\begin{aligned}
\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_V)} &= \inf\{\lambda > 0\,;\ \int \mathrm{e}^{\left(\frac{f_\theta}{\lambda}\right)^2} \mathrm{d}\mu_V \leq 2\} \\
&= \inf\{\lambda > 0\,;\ \frac{\sqrt{6}}{2} n \int \mathrm{e}^{\left(\frac{f_\theta}{\lambda}\right)^2} \mathrm{d}\mu_n \leq 2\} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} n \|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_n)}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 3.8.9,

$$\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_K)} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} n 2\sqrt{2} \frac{\|\theta\|_\infty}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{3}\|\theta\|_\infty \sqrt{n}.$$

Dans le cas où l'ensemble K est invariant sous permutations des coordonnées, on a

$$\|f_\theta\|_{\psi_2(\mu_K)} \leq \frac{1}{2} n 2\sqrt{2} \frac{\|\theta\|_\infty}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}\|\theta\|_\infty \sqrt{n}.$$

Ceci prouve notre théorème.

□

A partir du corollaire 3.8.15, on obtient une version analogue au corollaire 3.8.13,

Corollaire 3.8.17. *Pour tout corps convexe K de $\mathbb{R}^n$ inconditionnel en position isotrope et de volume 1, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ et pour tout $p \geq 2$,*

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_K)} \leq \frac{2\sqrt{6}}{\log(2)} \max\{1, C_n(\theta)\} \sqrt{p \log(p)}.$$

Démonstration. L'idée est essentiellement la même que celle utilisée lors de la démonstration de la proposition 3.8.12. Il existe un entier $q \geq 1$ tel que $q \leq p \leq 2q$, donc par croissance des normes $L^p(\mu_K)$ et en appliquant le corollaire 3.8.15,

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_K)} \leq \|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_K)} \leq \|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_V)} = \frac{\sqrt{6}}{2} n \|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_n)}.$$

En utilisant l'estimation de la quantité $n\|f_\theta\|_{L^{2q}(\mu_n)}$ utilisée lors de la démonstration de la proposition 3.8.12, on obtient

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_K)} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} 2\sqrt{2\mathrm{e}} \max\{\sqrt{p}, C_n(\theta) p \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\}.$$

Puis, on utilise le même argument de ladite démonstration, en faisant des cas selon p, ainsi

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_K)} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \max\{\sqrt{p}, C_n(\theta) \sqrt{p \log(p)}\}.$$

Et puisque $p \geq 2$, alors le même raisonnement pour démontrer le corollaire 3.8.13 nous dit que

$$\begin{aligned} \|f_\theta\|_{L^p(\mu_K)} &\leq \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{4}{\sqrt{\log(2)}} \frac{1}{\sqrt{\log(2)}} \max\{1, C_n(\theta)\} \sqrt{p \log(p)} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{\log(2)} \max\{1, C_n(\theta)\} \sqrt{p \log(p)}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_K)} \leq \frac{2\sqrt{6}}{\log(2)} \max\{1, C_n(\theta)\} \sqrt{p \log(p)}.$$

□

Pour démontrer le théorème 3.8.4, nous avons besoin de récrire l'estimation de la norme $\|.\|_{L^p(\mu_K)}$ de f_θ, obtenue au corollaire 3.8.17, en une inégalité de déviation appropriée.

Lemme 3.8.18. *Soit ξ une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que ξ vérifie pour tout $p \geq 2$ et pour une constante $A \geq \frac{1}{2}$,*

$$\|\xi\|_{L^p(\Omega)} \leq A\sqrt{p \log(p)}.$$

Alors, pour tout $t \geq 2A\mathrm{e}$*,*

$$\mathbb{P}\{|\xi| \geq t\} \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8A^2\mathrm{e}\log(t)}}.$$

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $p \geq 2$,

$$\int |\xi|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq (A\sqrt{p\log(p)})^p$$

où $A \geq \frac{1}{2}$. Donc, pour tout $p \geq 1$,

$$\int |\xi|^{2p} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq (A^2 2p\log(2p))^p.$$

On applique alors l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\{|\xi| \geq t\} = \mathbb{P}\{|\xi|^2 \geq t^2\} \leq \left(\frac{\int |\xi|^{2p} \,\mathrm{d}\mathbb{P}}{t^2}\right)^p \leq \left(\frac{A^2 2p\log(2p)}{t^2}\right)^p.$$

On choisit $p = \frac{ct^2}{\log(ct^2)}$ où $c > 0$ est tel que $ct^2 \geq \mathrm{e}$. De ce fait, puisque la fonction $x \mapsto \frac{x}{\log(x)}$ est croissante sur $[\mathrm{e}; +\infty[$, on a bien $\frac{ct^2}{\log(ct^2)} \geq 1$. Par ailleurs, $\log\left(2\frac{ct^2}{\log(ct^2)}\right) \leq \log(2ct^2) \leq 2\log(ct^2)$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|\xi| \geq t\} &\leq \left(\frac{A^2 2\frac{ct^2}{\log(ct^2)}\log\left(2\frac{ct^2}{\log(ct^2)}\right)}{t^2}\right)^{\frac{ct^2}{\log(ct^2)}} \\
&= \left(2A^2 c\frac{\log\left(2\frac{ct^2}{\log(ct^2)}\right)}{\log(ct^2)}\right)^{\frac{ct^2}{\log(ct^2)}} \\
&\leq (4A^2 c)^{\frac{ct^2}{\log(ct^2)}}.
\end{aligned}$$

On choisit $c = \frac{1}{4A^2\mathrm{e}}$. Alors,

$$ct^2 \geq \mathrm{e} \Longleftrightarrow \frac{t^2}{4A^2\mathrm{e}} \geq \mathrm{e} \Longleftrightarrow t \geq 2A\mathrm{e}.$$

Donc, pour tout $t \geq 2A\mathrm{e}$,

$$\mathbb{P}\{|\xi| \geq t\} \leq \left(\frac{4A^2}{4A^2\mathrm{e}}\right)^{\frac{t^2}{4A^2\mathrm{e}}\frac{1}{\log\left(\frac{t^2}{4A^2\mathrm{e}}\right)}} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4A^2\mathrm{e}\log\left(\frac{t^2}{4A^2\mathrm{e}}\right)}}.$$

Or, $A \geq \frac{1}{2}$, donc $4A^2\mathrm{e} \geq 1$. Ainsi, $\log\left(\frac{t^2}{4A^2\mathrm{e}}\right) \leq \log(t^2)$. Finalement, pour tout $t \geq 2A\mathrm{e}$,

$$\mathbb{P}\{|\xi| \geq t\} \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8A^2\mathrm{e}\log(t)}}.$$

$\square$

Démonstration du théorème 3.8.4. Soit $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Nous savons que notre application linéaire f_θ satisfait, d'après le corollaire 3.8.17,

$$\|f_\theta\|_{L^p(\mu_K)} \leq A(\theta)\sqrt{p\log(p)}$$

où $A(\theta) = \frac{2\sqrt{6}}{\log(2)}\max\{1, C_n(\theta)\}$. Cette constante, qui dépend de θ, a des petites déviations par rapport à la loi uniforme σ_{n-1} sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$. En effet, on considère la fonction $g(\theta) = \|\theta\|_\infty$ qui est 1-lipschitzienne car pour tout $\theta, \eta \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$|g(\theta) - g(\eta)| = |\|\theta\|_\infty - \|\eta\|_\infty| \leq \|\theta - \eta\|_\infty.$$

D'après un résultat de concentration sur la sphère (cf. [MIL-SCH]), pour tout $h > 0$,

$$\sigma_{n-1}\{g \geq m + h\} \leq \mathrm{e}^{-\frac{nh^2}{2}}$$

où m désigne la médiane de g par rapport à σ_{n-1}. Par ailleurs, il est connu que la médiane n'excède pas $\alpha\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$ pour une constante universelle $\alpha > 0$. En prenant $h = (\beta - \alpha)\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$ pour tout $\beta > \alpha$, on obtient

$$\sigma_{n-1}\left\{g \geq \beta\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}\right\} \leq \sigma_{n-1}\left\{g \geq m + h\right\} \leq \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}(\beta-\alpha)^2\frac{\log(n)}{n}} = n^{-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2}.$$

Autrement dit, pour tout $\beta > \alpha$, $\sigma_{n-1}\{C_n(\theta) \geq \beta\} \leq n^{-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2}$. Donc,

$$\sigma_{n-1}\left\{A(\theta) \geq \frac{2\sqrt{6}}{\log(2)}\beta\right\} \leq n^{-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2}.$$

Ainsi, en partant d'une constante $c_1 > 0$ quelconque, on choisit $\beta > \alpha$ tel que $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^2 = c_1$. Ensuite, en prenant $A = \frac{2\sqrt{6}}{\log(2)} \geq \frac{1}{2}$, on applique le lemme 3.8.18 pour obtenir

$$\mu_K\{|f_\theta| \geq t\} \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8A^2\mathrm{e}\log(t)}}$$

pour tout $t \geq t_0 := 2A\mathrm{e}$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, excepté pour un ensemble de $\mathbb{S}^{n-1}$ de mesure, par rapport à σ_{n-1}, au plus n^{-c_1}.

$\square$

Annexe A

Notions de probabilités

Pour une introduction à la théorie de la mesure et des probabilités, on peut consulter respectivement les livres [BRI] et [FOA]. Sinon, pour les notions de probabilités utiles à la géométrie convexe, on consultera [BAL].

La théorie de la mesure permet de définir et de généraliser les notions intuitives de longueur, d'aire et de volume. Nous n'allons pas refaire ici toute la théorie, mais puisqu'en géométrie convexe nous avons souvent besoin d'une approche probabiliste, nous rappelons brièvement les bases de la théorie des probabilités, supposant connues les bases de la théorie de la mesure. Nous rappelons toutefois un théorème phare de la théorie de la mesure, il s'agit du théorème de Fubini.

Théorème A.1.1 (Théorème de Fubini)**.** *Soient $(E_1, \mathcal{E}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{E}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés où les mesures μ_1 et μ_2 sont σ-finies. On note μ la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $E_1 \times E_2$. Soit $f : (E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2, \mu) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, μ-intégrable. Alors,*

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \times E_2} f \, \mathrm{d}\mu &= \int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Ce théorème implique que le volume n-dimensionnel d'un ensemble borélien K de $\mathbb{R}^n$ peut se calculer en intégrant les sections par des hyperplans parallèles à un hyperplan donné. Autrement dit,

$$|K| = \int_K \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |\{x \in K \, ; < x, \theta >= t\}|_{n-1} \, \mathrm{d}t$$

où $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$. Et plus généralement, pour toute fonction continue ϕ, pour toute direction $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\int_K \phi(< x, \theta >) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) |\{x \in K \, ; < x, \theta >= t\}|_{n-1} \, \mathrm{d}t.$$

Voici une autre application importante.

Proposition A.1.2. *Soit (X, μ) un espace mesuré.*
1) Soit $g : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive et soit $q > 0$, alors

$$\int g^q \,\mathrm{d}\mu = q \int_0^{+\infty} \mu(\{g \geq t\}) t^{q-1} \,\mathrm{d}t.$$

2) Soit $\phi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Soit $g : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive telle que $\phi(g) - \phi(0)$ soit μ-intégrable, alors on a

$$\int (\phi(g) - \phi(0)) \,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{g \geq t\}) \phi'(t) \,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. 1) On applique Fubini,

$$\int g^p \,\mathrm{d}\mu = \int \left(\int_0^g p t^{p-1} \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \mu(\{g \geq t\}).$$

2) Idem,

$$\int \phi(g) - \phi(0) \,\mathrm{d}\mu = \int \left(\int_0^g \phi'(t) \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \phi'(t) \mu(\{g \geq t\}) \,\mathrm{d}t.$$

□

Rappelons également la formule du changement de variable.

Théorème A.1.3 (Formule du changement de variable)**.** *On se place dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soit $h : D \to \Delta$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, c'est-à-dire que h est bijective et h ainsi que h^{-1} sont $\mathcal{C}^1$, où D et Δ sont des domaines de $\mathbb{R}^n$. On précise que*

$$h : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

On note J_h la matrice jacobienne de h.

Soit $f \in L^1(\Delta, \lambda)$. Alors,

$$\int_\Delta f(x) \,\mathrm{d}x = \int_D (f o h)(u) |\det J_h(u)| \,\mathrm{d}u.$$

Voici une application de la formule du changement de variable que nous utilisons régulièrement.

Proposition A.1.4. *Soient $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ et $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble quelconque mesurable. Alors $|T(K)| = |\det(T)||K|$. En particulier, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda K| = |\lambda|^n |K|$.*

Démonstration. A partir des hypothèses, on a

$$|T(K)| = \int_{T(K)} \mathrm{d}x = \int_K |\det(T)|\,\mathrm{d}u = |\det(T)||K|.$$

□

On appelle espace de probabilité un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour lequel la mesure $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité. On appelle mesure de probabilité une mesure $\mathbb{P}$ de masse totale égale à 1, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Les fonctions mesurables sur Ω sont appelées des variables aléatoires et lorsque ces fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ on parle de variable aléatoire réelle. L'intégrale d'une telle fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$, si elle existe, s'appelle l'espérance de X, que l'on note $\mathbb{E}[X]$. La variance de X est la quantité $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$, à condition que l'espérance existe, que l'on note $\mathbb{V}[X]$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $\mathbb{P}(X < t)$ la quantité $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) < t\})$, qui correspond à la probabilité que X soit strictement inférieur à t. De même pour $\mathbb{P}(X \leq t)$, $\mathbb{P}(X > t)$, $\mathbb{P}(X \geq t)$.

Théorème A.1.5 (Théorème central limite). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$ et $\mathbb{V}[X_1] \in]0; +\infty[$, alors si on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on obtient*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{V}[S_n]}} = \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{en loi.}$$

Nous rappelons également deux théorèmes importants.

Théorème A.1.6 (Loi forte des grands nombres). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}[X_1] < +\infty$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mathbb{E}[X_1] \qquad \text{presque surement.}$$

Théorème A.1.7 (Loi faible des grands nombres). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de carré intégrables, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \left| \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X_1] \right|^2 \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \qquad \text{(convergence en } \mathrm{L}^2\text{).}$$

La théorie des probabilités nous sert à mettre en évidence plus aisément des résultats de grandes déviations.

Proposition A.1.8 (Inégalité de Bernstein). *Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher, c'est-à-dire que pour tout*

$i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2}$, et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels, alors pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i\right| > t\right) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2|a|^2}}.$$

Démonstration. Tout d'abord, on suppose que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ et on montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i}] \leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i}] = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda a_i \varepsilon_i}] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda a_i \varepsilon_i}]$$

où la dernière inégalité est obtenue par indépendance des variables aléatoires. Or,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda a_i \varepsilon_i}] = \frac{\mathrm{e}^{\lambda a_i} + \mathrm{e}^{-\lambda a_i}}{2} = \cosh(\lambda a_i).$$

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \leq \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Or, $(2n)! = (2n)(2n-1)\dots(2n-n)(n-1)\dots 2 \geq n!\, 2^n$. Donc,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n!\, 2^n} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\cosh(\lambda a_i) \leq \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 a_i^2}{2}}$. Finalement,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i}] \leq \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2 a_i^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

car on a supposé $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$.

On cherche à estimer $\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i| > t)$. Pour cela, on applique alors l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i > t\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{t \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i} > \mathrm{e}^{t^2}\right) \leq \frac{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{t \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i}]}{\mathrm{e}^{t^2}} \leq \frac{\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}{\mathrm{e}^{t^2}} = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

De la même manière, on a que $\mathbb{P}(-\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i > t) \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Finalement,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i\right| > t\right) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Pour le cas général où l'on ne suppose rien sur $|a|$, on écrit

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\right| > t\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{|a|}\varepsilon_i\right| > \frac{t}{|a|}\right).$$

Alors, $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{|a|}\right)^2 = 1$, donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{|a|}\varepsilon_i\right| > \frac{t}{|a|}\right) \le 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2|a|^2}}.$$

$\square$

Proposition A.1.9. *Soit X un vecteur gaussien standard de $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Alors, pour tout $t \ge 0$,*

$$\mathbb{P}(|X| \ge t) \le 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}}.$$

Démonstration. On montre tout d'abord que

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{|X|^2}{2n}}] \le 2.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{|X|^2}{2n}}] &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{|x|^2}{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-|x|^2\frac{n-1}{2n}} \frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^n} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}\frac{n-1}{n}}\,\mathrm{d}x\right)^n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)^n \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}\log(1-\frac{1}{n})}.
\end{aligned}$$

Soit la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par

$$\phi : t \mapsto 2t\log(2) + \log(1-t).$$

Alors, ϕ'' est négative, donc ϕ est concave. Or, $\phi(0) = \phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Ainsi, ϕ est positive. Il s'ensuit que pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$-\log(1-t) \le 2t\log(2).$$

Donc,

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{|X|^2}{2n}}] \le \mathrm{e}^{\frac{n}{2}\frac{2}{n}\log(2)} = 2.$$

Pour conclure, on applique l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^{\frac{|X|^2}{2n}} \geq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2n}}) \leq \frac{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\frac{|X|^2}{2n}}]}{\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2n}}} \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2n}}.$$

$\square$

Annexe B

Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

Pour cette section, on se référera à [ART].

Définition B.1.1 (Fonction Gamma d'Euler)**.** *On appelle fonction Gamma d'Euler la fonction définie par*

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \,\mathrm{d}t.$$

i) Il s'agit d'une intégrale généralisée. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cependant, l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ se comporte comme l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ qui ne converge que pour $x > 0$. Par conséquent, la fonction Γ n'est définie que sur $]0, +\infty[$ (lorsque l'on travaille dans $\mathbb{R}$).

ii) Les théorèmes de Lebesgue (régularités sous le signe somme) nous disent que la fonction Γ est continue et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \log(t)^k \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \,\mathrm{d}t$$

qui est une intégrale bien définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ en effectuant par exemple le changement de variable $u = \log(t)$.

iii) Soit $x > 0$. Alors

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x \,\mathrm{d}t = \left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, on a l'identité

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

En particulier, en prenant des x entiers naturels, on obtient

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = \cdots = x!\Gamma(1).$$

Or,

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

iv) La fonction Γ est convexe car

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \log(t)^2 \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t > 0.$$

Il vient que Γ' s'annule au plus une fois. Or,

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

donc, Γ' s'annule exactement une fois en un point α dans l'intervalle $]1, 2[$. D'autre part, on a clairement

$$\lim_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$$

et puisque Γ est croissante sur $]2, +\infty[$, alors pour tout $x \geq 2$,

$$\Gamma(x) \geq \Gamma([x])([x]-1)!$$

où $[.]$ désigne la partie entière. Donc,

$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

v) La fonction Γ est log-convexe d'après la proposition 1.4.16. C'est également une autre façon de voir que Γ est convexe.

Définition B.1.2 (Fonction Bêta d'Euler)**.** *On appelle fonction Bêta d'Euler la fonction définie par*

$$\mathcal{B} : (x, y) \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

i) Il s'agit d'une intégrale généralisée. On écrit

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

et on voit que l'intégrale de gauche n'est définie que si $x > 0$ et l'intégrale de droite n'est définie que si $y > 0$. Par conséquent, la fonction $\mathcal{B}$ est définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

ii) Pour tous $x, y > 0$, la fonction $\mathcal{B}$ vérifie

$$\mathcal{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

En effet, d'après Fubini,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t-s}t^{x-1}s^{y-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}t^{x-1}(u-t)^{y-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\int_0^{u} t^{x-1}(u-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}u^{x+y-1}\left(\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \Gamma(x+y)\mathcal{B}(x,y).
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\mathcal{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Théorème B.1.3 (Formule de Stirling)**.** *La formule de Stirling donne un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la fonction Gamma et donc de la fonction factorielle.*

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{1}{12x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

avec $\lim_{x\to+\infty} o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Démonstration. On sait que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}y^x\,\mathrm{d}y.$$

En utilisant le développement en série entière des fonctions logarithme et exponentielle,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}y^x\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xs}(xs)^x x\,\mathrm{d}s \\
&= x^{x+1}\int_0^{+\infty} s^x\mathrm{e}^{-xs}\,\mathrm{d}s \\
&= x^{x+1}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x(\log(s)-s)}\,\mathrm{d}s \\
&= x^{x+1}\int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{x(\log(w+1)-(w+1))}\,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

Or, $\log(1+w) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\frac{w^k}{k}$ et $\mathrm{e}^w = \sum_{k\geq 0}\frac{w^k}{k!}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y} y^x \mathrm{d}y &= x^{x+1} \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{x(-1-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\frac{w^4}{4}+\dots)}\,\mathrm{d}w \\
&= \mathrm{e}^{-x} x^{x+1} \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{xw^2}{2}} \mathrm{e}^{\frac{xw^3}{3}} \mathrm{e}^{-\frac{xw^4}{4}} \dots \mathrm{d}w \\
&= \mathrm{e}^{-x} x^{x+1} \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{xw^2}{2}} \left(1+\frac{xw^3}{3}+\frac{x^2w^6}{18}+\dots\right)\left(1-\frac{xw^4}{4}+\dots\right)\dots \mathrm{d}w \\
&= \mathrm{e}^{-x} x^{x+1} \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{xw^2}{2}} \left(1+\frac{xw^3}{3}+\frac{x^2w^6}{18}-\frac{xw^4}{4}+\dots\right) \mathrm{d}w \\
&= \mathrm{e}^{-x} x^{x+1} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2} \left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{x}}v^3 - \frac{1}{x}v^4 + \frac{4}{9x}v^6 + \dots\right) \mathrm{d}v \\
&= \mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2} \left(\int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v + \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{x}} v^3 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \right. \\
&\qquad \left. - \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} \frac{1}{x} v^4 \mathrm{e}^{-v^2} \mathrm{d}v + \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} \frac{4}{9x} v^6 \mathrm{e}^{-v^2} \mathrm{d}v + \dots \right).
\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} \frac{2}{3} v^3 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{3} v^3 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = 0$$

car on intègre une fonction impaire (et intégrable).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} v^4 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^4 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \left[-\frac{v^3\mathrm{e}^{-v^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{3}{2}\left[-\frac{v\mathrm{e}^{-v^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} v^6 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v &= \int_{-\infty}^{+\infty} v^6 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \left[-\frac{v^5\mathrm{e}^{-v^2}}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v^4 \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \mathrm{e}^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2}\left(\sqrt{\pi} + \frac{3}{4x}\sqrt{\pi} + \frac{5}{6x}\sqrt{\pi} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{1}{12x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to+\infty} o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

□

Cette formule permet d'envisager une minoration de $n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition B.1.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $0! = 1$ et $\left(\frac{0}{\mathrm{e}}\right)^0 = 1$ avec la convention que $0^0 = 1$. Sinon, pour $n = 1$, $1! = 1$ et $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \leq 1$.

On suppose la propriété vraie au rang n. Alors $(n+1)! \geq (n+1)\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ et on veut montrer que $(n+1)\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$. Ce qui revient à montrer que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\log(1+\frac{1}{n})} \leq \mathrm{e}^{n\frac{1}{n}} = \mathrm{e}.$$

□

Corollaire B.1.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a l'inégalité $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{n\mathrm{e}}{k}\right)^k$.*

Démonstration. D'après la proposition B.1.4, $k! \geq \left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &\leq \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^k \\ &= n(n-1)\ldots(n-(k-1))\left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^k \\ &\leq n^k\left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^k \\ &= \left(\frac{n\mathrm{e}}{k}\right)^k.\end{aligned}$$

□

Annexe C

Normes ψ_α : formulations équivalentes

Dans ce chapitre, $\alpha \in [1, +\infty[$ est une constante donnée. Les deux cas qui nous intéresseront le plus dans la suite sont $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$. On se donne un espace probabilisé (X, μ). On introduit l'ensemble

$$L_{\psi_\alpha}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\, \exists c > 0, \int \mathrm{e}^{c|f|^\alpha}\,\mathrm{d}\mu < +\infty\}$$

et pour $f : X \to \mathbb{R}$, on introduit la quantité

$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} = \inf\{\lambda > 0\,;\, \int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^\alpha}\,\mathrm{d}\mu \leq 2\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

Par définition de $\|.\|_{\psi_\alpha(\mu)}$ (on prend l'infimum), s'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^\alpha}\,\mathrm{d}\mu \leq 2$$

alors $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq \lambda$.

Proposition C.1.1. *On a l'égalité ensembliste*

$$L_{\psi_\alpha}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R}\,;\, \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} < +\infty\}.$$

Démonstration. $\underline{\supseteq}$: Soit $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} < +\infty$, alors il existe $\lambda > 0$ telle que

$$\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^\alpha}\,\mathrm{d}\mu \leq 2$$

donc il existe $c > 0$, $c = \frac{1}{\lambda^\alpha}$, tel que

$$\int \mathrm{e}^{c|f|^\alpha}\,\mathrm{d}\mu \leq 2 < +\infty$$

en prenant $c = \frac{1}{\lambda^\alpha}$.
$\underline{\subset}$: On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\int e^{c|f|^\alpha} = M < +\infty$. Soit $\lambda > 0$. Si $\frac{1}{\lambda^\alpha} \leq c$, alors

$$\left(\int e^{\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu\right)^{\lambda^\alpha} = \|e^{|f|^\alpha}\|_{L^{\frac{1}{\lambda^\alpha}}(\mu)} \leq \|e^{|f|^\alpha}\|_{L^c(\mu)}.$$

Donc,

$$\int e^{\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu \leq \left(\int e^{c|f|^\alpha} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{c\lambda^\alpha}} = M^{\frac{1}{c\lambda^\alpha}}.$$

Or,

$$M^{\frac{1}{c\lambda^\alpha}} \leq 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{c\lambda^\alpha} \log(M) \leq \log(2) \Longleftrightarrow \lambda \geq \left(\frac{\log(m)}{c\log(2)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Par conséquent, si $\lambda = \max\left\{\left(\frac{\log(m)}{c\log(2)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{1}{c^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}$, alors $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq \lambda < +\infty$.

$\square$

Ces notations proviennent de la théorie des espaces de Orlicz. L'espace L_{ψ_α} est en effet l'espace de Orlicz associé à la fonction $\psi_\alpha(t) = e^{|t|^\alpha} - 1$, qui vérifie en autre les propriétés suivantes
i) $\psi_\alpha : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$.
ii) ψ_α est paire et convexe.
iii) $\psi_\alpha(0) = 0$ et pour tout $t \neq 0$, $\psi_\alpha(t) > 0$.
De telles fonctions sont appelées fonction de Young. On définit alors

$$L_{\psi_\alpha}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} ; \int \psi_\alpha(f)\, \mathrm{d}\mu < +\infty\}$$

et

$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} = \inf\{\lambda > 0 ; \int \psi_\alpha\left(\frac{f}{\lambda}\right) \mathrm{d}\mu \leq 1\}.$$

Théorème C.1.2. *Avec les définitions ci-dessus, l'espace* $(L_{\psi_\alpha}(\mu), \|.\|_{\psi_\alpha(\mu)})$ *est un espace de Banach.*

Proposition C.1.3. *Si on considère, pour tout* $p \geq 1$*, la fonction de Young* $\psi_\alpha : t \mapsto |t|^p$*, alors*

$$L_{\psi_\alpha}(\mu) = L^p(\mu) \qquad et \qquad \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} = \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Démonstration. D'après les hypothèses,

$$L_{\psi_\alpha}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} ; \int \psi_\alpha(f) \mathrm{d}\mu < +\infty\} = \{f : X \to \mathbb{R} ; \int |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty\} = L^p(\mu).$$

D'autre part, soit $p \geq 1$. Alors,

$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} = \inf\{\lambda > 0; \int \left|\frac{f}{\lambda}\right|^p \mathrm{d}\mu \leq 1\} = \inf\{\lambda > 0; \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda\} = \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

$\square$

Pour plus d'informations sur les espaces de Orlicz, on peut consulter [KUF].

Dorénavant, nous considérons comme fonction de Young la fonction

$$t \mapsto \psi_\alpha(t) = \mathrm{e}^{|t|^\alpha} - 1.$$

Lemme C.1.4. *Pour toute probabilité μ et toute fonction $f \in L_{\psi_\alpha}(\mu)$, on a*

$$\frac{1}{2} \sup_{p \geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq 2\mathrm{e} \sup_{p \geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Démonstration. Commençons par montrer que $\frac{1}{2} \sup_{p \geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)}$. On a

$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} = \inf\{\lambda > 0\,; \int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu \leq 2\}.$$

Ainsi,

$$2 \geq \int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)}}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)}}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu &= \int \sum_{p \geq 0} \frac{|f|^{\alpha p}}{p!\|f\|^{\alpha p}_{\psi_\alpha(\mu)}} \mathrm{d}\mu \\
&\geq \int \frac{|f|^{\alpha p}}{p!\|f\|^{\alpha p}_{\psi_\alpha(\mu)}} \mathrm{d}\mu \ (p \mapsto \tfrac{|f|^{\alpha p}}{p!\|f\|^{\alpha p}_{\psi_\alpha(\mu)}} \text{ positive}) \\
&\geq \frac{1}{p!\|f\|^{\alpha p}_{\psi_\alpha(\mu)}} \|f\|^{\alpha p}_{L^p(\mu)} \ (\text{Jensen}) \\
&\geq \frac{1}{p^p\|f\|^{\alpha p}_{\psi_\alpha(\mu)}} \|f\|^{\alpha p}_{L^p(\mu)}.
\end{aligned}$$

On a donc obtenu que

$$\|f\|^{\alpha p}_{\psi_\alpha(\mu)} \geq \frac{1}{2p^p} \|f\|^{\alpha p}_{L^p(\mu)}.$$

Donc,

$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha p}}} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \geq \frac{1}{2} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Cela pour tout $p \geq 1$. Par définition du supremum,

$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}} \sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Montrons maintenant que $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq 2\mathrm{e} \sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}$. Soit $\lambda > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu &= \int \sum_{p\geq 0} \frac{|f|^{\alpha p}}{p!\lambda^{\alpha p}} \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{p\geq 0} \frac{\|f\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}(\mu)}}{p!\lambda^{\alpha p}} \\
&\leq \sum_{p\geq 0} \left(\frac{\mathrm{e}}{p\lambda^\alpha} \|f\|^\alpha_{L^{\alpha p}(\mu)}\right)^p \\
&= 1 + \sum_{p\geq 1} \left(\frac{\mathrm{e}}{p\lambda^\alpha} \|f\|^\alpha_{L^{\alpha p}(\mu)}\right)^p \\
&\leq 1 + \sum_{p\geq 1} \left(\frac{\mathrm{e}}{\lambda^\alpha} \left(\sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha\right)^p \\
&= \sum_{p\geq 0} \left(\frac{\mathrm{e}}{\lambda^\alpha} \left(\sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha\right)^p.
\end{aligned}$$

On veut

$$\sum_{p\geq 0} \left(\frac{\mathrm{e}}{\lambda^\alpha} \left(\sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha\right)^p \leq 2.$$

Puisqu'il s'agit d'une série géométrique, on obtient ce résultat par exemple pour

$$\frac{\mathrm{e}}{\lambda^\alpha} \left(\sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha = \frac{1}{2}.$$

Autrement dit pour

$$\lambda = (2\mathrm{e})^{\frac{1}{\alpha}} \sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Par définition de $\|.\|_{\psi_\alpha(\mu)}$, on a

$$\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq \lambda = (2\mathrm{e})^{\frac{1}{\alpha}} \sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \leq 2\mathrm{e} \sup_{p\geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

□

Théorème C.1.5. *Etant données une constante $c > 0$ et une fonction f de X dans $\mathbb{R}$, considérons les deux propriétés suivantes*

$$
\begin{aligned}
P(c) \ &: \qquad \int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{c}\right)^{\alpha}} \mathrm{d}\mu \leq 2 \quad (\textit{autrement dit, } \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c) \\
Q(c) \ &: \qquad \forall p \geq 1, \ \|f\|_{L^p(\mu)} \leq c p^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}
$$

Alors ces propriétés sont équivalentes au sens suivant

$$
\begin{aligned}
P(c) &\Longrightarrow Q(2c) \\
Q(c) &\Longrightarrow P(2\mathrm{e}c).
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, si on considère la propriété

$$
R(\lambda_0, C, c) \ : \qquad \forall t \geq \lambda_0, \ \mu(\{|f| \geq t\}) \leq C\mathrm{e}^{-\frac{t^\alpha}{c^\alpha}}
$$

où λ_0 et C sont positives, alors on a

$$
\begin{aligned}
P(c) &\Longrightarrow R(0, 2, c) \\
R(\lambda_0, C, c) &\Longrightarrow P(K)
\end{aligned}
$$

où K ne dépend que de λ_0, C, c.

Démonstration. Montrons que $P(c) \Longrightarrow Q(2c)$. La propriété

$$
P(c) : \int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{c}\right)^{\alpha}} \mathrm{d}\mu \leq 2
$$

traduit le fait que $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c$. Donc, d'après le lemme C.1.4, pour tout $p \geq 1$,

$$
\frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \sup_{p \geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \leq \|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq 2c.
$$

Ainsi, pour tout $p \geq 1$,

$$
\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 2cp^{\frac{1}{\alpha}}.
$$

Par conséquent,

$$
P(c) \Longrightarrow Q(2c).
$$

Montrons que $Q(c) \Longrightarrow P(2\mathrm{e}c)$. Si on a $Q(c)$, alors pour tout $p \geq 1$,

$$
\|f\|_{L^p(\mu)} \leq cp^{\frac{1}{\alpha}}.
$$

Donc, $\sup_{p \geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}} \leq c$. Par le lemme C.1.4, on a

$$
\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq 2\mathrm{e} \sup_{p \geq 1} \frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{p^{\frac{1}{\alpha}}}.
$$

Par conséquent, $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq 2ec$. Finalement,

$$Q(c) \Longrightarrow P(4\mathrm{e}c).$$

Montrons que $P(c) \Longrightarrow R(0,2,c)$. Soit $t \geq 0$. Alors, par l'inégalité de Markov,

$$\mu(\{|f| \geq t\}) = \mu(\{\mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{c}\right)^\alpha} \geq \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{c}\right)^\alpha}\}) \leq \frac{\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{c}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu}{\mathrm{e}^{\left(\frac{t}{c}\right)^\alpha}} \leq 2\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{c}\right)^\alpha}.$$

Montrons que $R(\lambda_0, C, c) \Longrightarrow P(K)$ où K ne dépend que de λ_0, C, c. Soit $K > 0$ que l'on explicitera plus tard. On utilise la proposition A.1.2,

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{K}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu &= 1 + \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{K^\alpha} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{K}\right)^\alpha} \mu(\{|f| \geq t\})\,\mathrm{d}t \\
&\leq 1 + \int_0^{\lambda_0} \frac{\alpha}{K^\alpha} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{K}\right)^\alpha} \mathrm{d}t + \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\alpha}{K^\alpha} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{K}\right)^\alpha} \mu(\{|f| \geq t\})\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \mathrm{e}^{\left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^\alpha} - 1 + \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\alpha}{K^\alpha} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{\left(\frac{t}{K}\right)^\alpha} \mu(\{|f| \geq t\})\,\mathrm{d}t \\
&\leq \mathrm{e}^{\left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^\alpha} + \int_{\lambda_0}^{+\infty} \frac{\alpha}{K^\alpha} t^{\alpha-1} C \mathrm{e}^{-t^\alpha\left(\frac{1}{c^\alpha} - \frac{1}{K^\alpha}\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{\left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^\alpha} + \frac{C\mathrm{e}^{-\lambda_0{}^\alpha\left(\frac{1}{c^\alpha} - \frac{1}{K^\alpha}\right)}}{\frac{K^\alpha}{c^\alpha} - 1}
\end{aligned}$$

à condition que $K > c$, de sorte que $\frac{1}{c^\alpha} - \frac{1}{K^\alpha} > 0$. Il s'ensuite que

$$\mathrm{e}^{-\lambda_0{}^\alpha\left(\frac{1}{c^\alpha} - \frac{1}{K^\alpha}\right)} \leq 1$$

et donc,

$$\frac{C\mathrm{e}^{-\lambda_0{}^\alpha\left(\frac{1}{c^\alpha} - \frac{1}{K^\alpha}\right)}}{\frac{K^\alpha}{c^\alpha} - 1} \leq \frac{1}{2} \Longleftarrow \frac{C}{\frac{K^\alpha}{c^\alpha} - 1} \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2C + 1 \leq \frac{K^\alpha}{c^\alpha} \Longleftrightarrow c(2C+1)^{\frac{1}{\alpha}} \leq K.$$

Par conséquent, si $K \geq c(2C+1)^{\frac{1}{\alpha}}$, alors

$$\frac{C\mathrm{e}^{-\lambda_0{}^\alpha\left(\frac{1}{c^\alpha} - \frac{1}{K^\alpha}\right)}}{\frac{K^\alpha}{c^\alpha} - 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{e}^{\left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^\alpha} \leq \frac{3}{2} \Longleftrightarrow \left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^\alpha \leq \log\left(\frac{3}{2}\right) \Longleftrightarrow K \geq \frac{\lambda_0}{\log\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Par conséquent, si $K \geq \frac{\lambda_0}{\log\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$, alors

$$\mathrm{e}^{\left(\frac{\lambda_0}{K}\right)^\alpha} \leq \frac{3}{2}.$$

Finalement, en prenant $K = \max\{c(2C+1), \frac{\lambda_0}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}\}$, alors

$$\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{K}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu \leq 2.$$

$\square$

Si on applique le théorème C.1.5 à une forme normalisée de f, par exemple $\frac{f}{\|f\|_{L^1(\mu)}}$, alors on obtient le corollaire

Corollaire C.1.6. *Soient $c > 0$ une constante donnée et f une fonction μ-intégrable telle que*

$$\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{c\|f\|_{L^1(\mu)}}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu \leq 2$$

c'est-à-dire que $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c\|f\|_{L^1(\mu)}$, alors pour tout $p \geq 1$,

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 2cp^{\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

On rappelle que par Jensen ou Hölder, on a toujours pour tout $p \geq 1$

$$\|f\|_{L^1(\mu)} \leq \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Ainsi, l'inégalité du corollaire C.1.6 s'apparente à une forme inverse de l'inégalité de Hölder. On dit que c'est une inégalité de type Khintchine (cf. proposition D.2.4).

De même, si on applique à f une normalisation L^2, alors d'après le théorème C.1.5, on obtient le corollaire

Corollaire C.1.7. *Soient $c > 0$ une constante donnée et f une fonction μ-intégrable telle que*

$$\int \mathrm{e}^{\left(\frac{|f|}{c\|f\|_{L^2(\mu)}}\right)^\alpha} \mathrm{d}\mu \leq 2$$

c'est-à-dire que $\|f\|_{\psi_\alpha(\mu)} \leq c\|f\|_{L^2(\mu)}$, alors pour tout $p \geq 1$,

$$\|f\|_{L^p(\mu)} \leq 2cp^{\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^2(\mu)}.$$

Annexe D

Compilation d'inégalités

D.1 Inégalités classiques

Proposition D.1.1 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** *Soient* $x_1, \dots, x_n$ *des réels positifs et* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *des réels positifs tels que* $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$*. Alors,*

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$*.*

Démonstration. Si l'un des x_k est nul, la relation est immédiate. On suppose alors les x_k strictement positifs. Par convexité de la fonction exponentielle,

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} &= \mathrm{e}^{\alpha_1 \log(x_1) + \cdots + \alpha_n \log(x_n)} \\ &\leq \alpha_1 \mathrm{e}^{\log(x_1)} + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\log(x_n)} \\ &= \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant strictement convexe, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\alpha_1 \log(x_1) + \cdots + \alpha_n \log(x_n)} &= \alpha_1 \mathrm{e}^{\log(x_1)} + \cdots + \alpha_n \mathrm{e}^{\log(x_n)} \\ &\iff \log(x_1) = \cdots = \log(x_n) \\ &\iff x_1 = \cdots = x_n. \end{aligned}$$

□

Proposition D.1.2 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit* $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *un espace mesuré. Soient pour tout* $1 \leq j \leq n$, $f_j \in L^{p_j}(\mu)$ *où* $p_j \geq 0$ *et* $\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = 1$*. Alors,* $\prod_{j=1}^n f_j \in L^1(\mu)$ *et*

$$\int \prod_{j=1}^n |f_j| \,\mathrm{d}\mu \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p_j}(\mu)}.$$

Démonstration. S'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p_j = 1$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, $p_i = +\infty$ et on a

$$\int \prod_{j=1}^{n} |f_j| \,\mathrm{d}\mu \leq \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \|f_i\|_{L^\infty(\mu)} \int |f_j| \,\mathrm{d}\mu = \|f_j\|_{L^1(\mu)} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \|f_i\|_{L^\infty(\mu)}.$$

On suppose maintenant que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $p_j \neq 1$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient pour tout $x \in E$

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{|f_j(x)|}{\|f_j\|_{L^{p_j}(\mu)}} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} \frac{|f_j(x)|^{p_j}}{\|f_j\|_{L^{p_j}(\mu)}^{p_j}}.$$

En intégrant, on obtient

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\|f_j\|_{L^{p_j}(\mu)}} \int |f_j| \,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j \|f_j\|_{L^{p_j}(\mu)}^{p_j}} \int |f_j|^{p_j} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = 1.$$

Finalement, $\prod_{j=1}^{n} f_j \in L^1(\mu)$ et

$$\int \prod_{j=1}^{n} |f_j| \,\mathrm{d}\mu \leq \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{p_j}(\mu)}.$$

□

Proposition D.1.3 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $1 < p < +\infty$ et soient f, g deux fonctions mesurables à valeurs réelles. Alors*

$$\left(\int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Première démonstration. Soit q l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. D'après l'inégalité de Hölder,

$$\int |f| |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{q(p-1)} \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

et

$$\int |g| |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int |g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{q(p-1)} \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Or, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Ainsi, $q(p-1) = p$. Donc, en sommant les deux inégalités ci-dessus, on obtient

$$\int (|f| + |g|) |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Puisque
$$\int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \int (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu$$
alors
$$\int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$
Finalement,
$$\left(\int |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Deuxième démonstration. Si $f=0$ ou $g=0$, la relation est immédiate. On suppose alors $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Soit $p \geq 1$. On suppose que
$$\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int |g|^p \,\mathrm{d}\mu = 1.$$
Puisque la fonction $|.|^p$ est convexe, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$,
$$\int |(1-\lambda)f + \lambda g|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \int (1-\lambda)|f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int \lambda |g|^p \,\mathrm{d}\mu = 1.$$
On pose $\widetilde{f} = \frac{f}{\|f\|_{L^p}}$ et $\widetilde{g} = \frac{g}{\|g\|_{L^p}}$. Ainsi,
$$\int |\widetilde{f}|^p \,\mathrm{d}\mu = \int |\widetilde{g}|^p \,\mathrm{d}\mu = 1.$$
Donc,
$$\int |(1-\lambda)\widetilde{f} + \lambda \widetilde{g}|^p \,\mathrm{d}\mu \leq 1.$$
Or, en choisissant $\lambda = \frac{\|g\|_{L^p}}{\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}}$,
$$(1-\lambda)\widetilde{f} + \lambda\widetilde{g} = \frac{f+g}{\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}}.$$
Finalement,
$$\left\| \frac{f+g}{\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}} \right\|_{L^p} \leq 1.$$
Autrement dit,
$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

□

Corollaire D.1.4. *Soit* $(E, \mathcal{E}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $0 < p < 1$ *et soient* f, g *deux fonctions mesurables à valeurs réelles. Alors*

$$\left(\int |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. On récrit la deuxième démonstration de la proposition D.1.3 sauf que cette fois, la fonction $|.|^p$ est concave, ce qui change le sens des inégalités.

$\square$

Proposition D.1.5 (Inégalité de Jensen)**.** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable et soit* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe. On suppose que* f *et* $\phi \circ f$ *sont* $\mathbb{P}-$*intégrables. Alors,*

$$\phi\left(\int f \, \mathrm{d}\mathbb{P}\right) \leq \int \phi \circ f \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Démonstration. Puisque ϕ est une fonction convexe, alors d'après le corollaire 1.4.9, ϕ est continue et ses dérivées à gauche et à droite, notées respectivement ϕ'_g et ϕ'_d, existent et sont croissantes. On a de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi'_g(x) \leq \phi'_d(x).$$

Soient $x, u, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < u < y$, alors, d'après la proposition 1.4.7,

$$\frac{\phi(u) - \phi(x)}{u - x} \leq \frac{\phi(y) - \phi(u)}{y - u}.$$

En faisant tendre u vers y, on obtient

$$\phi(x) \geq \phi'_g(y)(x - y) + \phi(y).$$

De manière similaire, si $x > y$, alors

$$\phi(x) \geq \phi'_d(y)(x - y) + \phi(y).$$

Puisque $\phi'_g \leq \phi'_d$, on a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$\phi(x) \geq \phi'_g(y)(x - y) + \phi(y).$$

En choisissant $x = f(z)$ et $y = \int f \, \mathrm{d}\mu$ dans cette inégalité, on obtient

$$\phi(f(z)) \geq \phi\left(\int f \, \mathrm{d}\mu\right) + \phi'_g\left(\int f \, \mathrm{d}\mu\right)\left(f(z) - \int f \, \mathrm{d}\mu\right).$$

En intégrant,

$$\begin{aligned} \int \phi(f(z)) \mathrm{d}\mu(z) &\geq \int \phi\left(\int f \mathrm{d}\mu\right) \mathrm{d}\mu + \int \phi'_g\left(\int f \mathrm{d}\mu\right)\left(f(z) - \int f \mathrm{d}\mu\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \phi\left(\int f \mathrm{d}\mu\right) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\int \mathrm{d}\mu = 1$.

$\square$

Corollaire D.1.6. *Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $1 < p < +\infty$ et soit $f \in L^1(E) \cap L^p(E)$. Alors*

$$\left\| \int f \,\mathrm{d}\mu \right\|_{L^p} \leq \int \|f\|_{L^p} \,\mathrm{d}\mu.$$

Si $0 < p < 1$, alors

$$\left\| \int f \,\mathrm{d}\mu \right\|_{L^p} \geq \int \|f\|_{L^p} \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposition D.1.7 (Inégalité de Markov)**.** *Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors,*

$$\mu(\{|f| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\|f\|_{L^p}^p}{\varepsilon^p}.$$

Démonstration. On reprend les hypothèses de l'énoncé.

$$\mu(\{|f| \geq \varepsilon\}) = \int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} \mathrm{d}\mu \leq \int_{\{|f| \geq \varepsilon\}} \frac{|f|^p}{\varepsilon^p} \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \frac{\|f\|_{L^p}^p}{\varepsilon^p}.$$

$\square$

D.2 Inégalités de type Khintchine et généralisation

Les inégalités de type Khintchine sont en quelque sorte des inégalités de Hölder inversées. On se reportera notamment à [MIL-SCH].

Théorème D.2.1 (Lemme de Borell)**.** *Soit μ une mesure de probabilité log-concave sur $\mathbb{R}^n$. Soit A un ensemble convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mu(A) > 0$. Alors, pour tout $r \geq 1$,*

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus rA) \leq \mu(A) \left(\frac{1 - \mu(A)}{\mu(A)} \right)^{\frac{r+1}{2}}.$$

Démonstration. Soit un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ comme dans les hypothèses. On va montrer que pour tout $r \geq 1$, on a

$$\frac{2}{r+1}(rA)^c + \frac{r-1}{r+1} A \subset A^c.$$

Nous allons montrer cela de deux manières. Premièrement, on considère la jauge p_A de A, qui est paire car A est symétrique. De plus, grâce aux hypothèses sur A,

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, p_A(x) \leq 1\}.$$

Donc $rA = \{p_A \leq r\}$ et $(rA)^c = \{p_A > r\}$. Soient alors $x \in (rA)^c$ et $y \in A$. Puisque

$$p_A(x) = p_A(x - y + y) \leq p_A(x+y) + p_A(-y)$$

alors

$$p_A(x) - p_A(-y) \leq p_A(x+y).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
p_A\left(\frac{2}{r+1}x + \frac{r-1}{r+1}y\right) &\geq p_A(\frac{2}{r+1}x) - p_A(-\frac{r-1}{r+1}y) \\
&= p_A(\frac{2}{r+1}x) - p_A(\frac{r-1}{r+1}y) \text{ car } p_A \text{ paire} \\
&> \frac{2}{r+1}r - p_A(\frac{r-1}{r+1}y) \text{ car } x \in (rA)^c \\
&> \frac{2r}{r+1} - \frac{r-1}{r+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{2}{r+1}x + \frac{r-1}{r+1}y \in A^c.$$

Finalement,

$$\frac{2}{r+1}(rA)^c + \frac{r-1}{r+1}A \subset A^c.$$

Pour la deuxième manière de démontrer ce résultat, on procède par l'absurde. On considère $x \in (rA)^c$ et $y \in A$ et on suppose que

$$z := \frac{2}{r+1}x + \frac{r-1}{r+1}y \in A.$$

Alors, par symétrie et convexité de A,

$$x = \frac{r+1}{2}z - \frac{r-1}{2}y \in \frac{r+1}{2}A + \frac{r-1}{2}A = rA.$$

Ce qui est absurde puisque par hypothèse, $x \in (rA)^c$.

On remarque que

$$\frac{2}{r+1} + \frac{r-1}{r+1} = 1.$$

On peut alors appliquer l'inégalité de Prékopa-Leindler, μ étant log-concave,

$$\mu(A^c) \geq \mu\left(\frac{2}{r+1}(rA)^c + \frac{r-1}{r+1}A\right) \geq \mu((rA)^c)^{\frac{2}{r+1}}\mu(A)^{\frac{r-1}{r+1}}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1-\mu(A)}{\mu(A)^{\frac{r-1}{r+1}}} \geq \mu(\mathbb{R}^n \setminus rA)^{\frac{2}{r+1}}$$

Finalement,

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus rA) \leq \frac{(1-\mu(A))^{\frac{r+1}{2}}}{\mu(A)^{\frac{r-1}{2}}} = \mu(A)\left(\frac{1-\mu(A)}{\mu(A)}\right)^{\frac{r+1}{2}}.$$

□

On retrouvera le lemme de Borell dans [BOR1].

Corollaire D.2.2. *Si A est un ensemble convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mu(A) \geq \frac{3}{4}$, alors pour tout $r \geq 1$,*

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus rA) \leq \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}}.$$

Démonstration. En effet, si $\mu(A) \in [\frac{3}{4}, 1]$, alors puisque la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[\frac{3}{4}, 1]$,

$$\mu(\mathbb{R}^n \backslash rA) \leq \mu(A)\left(\frac{1-\mu(A)}{\mu(A)}\right)^{\frac{r+1}{2}} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{r+1}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{r+1}{2}\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{r+1}{2}\log(3)} \leq \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}}.$$

□

Corollaire D.2.3. *Soit μ une mesure de probabilité log-concave sur $\mathbb{R}^n$. Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme paire, alors en posant $M = \int F \,\mathrm{d}\mu$, on a pour tout $r \geq 1$*

$$\mu(\{F \geq 4Mr\}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}}.$$

Démonstration. Soit $A = \{F < 4M\}$. Alors A est un convexe symétrique car F est une semi-norme paire. De plus,

$$M \geq \int_{A^c} F \,\mathrm{d}\mu \geq 4M\mu(A^c).$$

D'où, $\mu(A^c) \leq \frac{1}{4}$ et donc $\mu(A) \geq \frac{3}{4}$. Pour $r \geq 1$, par homogénéité de F, on a

$$\{F < 4rM\} = rA$$

Donc, d'après le lemme de Borell,

$$\mu(\{F \geq 4Mr\}) = \mu((rA)^c) \leq \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}}.$$

□

D'après l'inégalité de Jensen, pour tout $q \geq 1$,

$$\int F \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int F^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc si on remplace M par $\left(\int F^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, l'inégalité reste vraie.

Applications On applique ces résultats aux deux fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto | < x, \theta > |$ pour une direction $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ fixée .

Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1. Alors, pour tout $r \geq 1$,

$$\left| \{ x \in K \, ; \, |x| \geq 4r \int_K |y| \, \mathrm{d}y \} \right| \leq \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}}$$

et pour toute direction $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, pour tout $r \geq 1$,

$$\left| \{ x \in K \, ; \, | < x, \theta > | \geq 4r \left(\int_K | < y, \theta > |^2 \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{2}} \} \right| \leq \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}}.$$

Passons maintenant à une inégalité démontrée par Borell, que l'on appelle inégalité de type Khintchine. Il s'agit d'une conséquence importante du lemme de Borell. La démonstration a déjà été faite de manière plus générale mais moins directe en annexe dans la section « normes ψ_α », mais nous la refaisons dans ce cas particulier pour mettre clairement en évidence les constantes.

Proposition D.2.4 (Inégalité de type Khintchine)**.** *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1. Pour tout $p \geq 1$ et tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, il existe une constante universelle $C > 0$ telle que*

$$\left(\int_K | < x, \theta > |^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cp \int_K | < x, \theta > | \, \mathrm{d}x.$$

Démonstration. D'après le corollaire D.2.3, pour tout $r \geq 1$ et pour toute direction $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\left| \{ x \in K \, ; \, | < x, \theta > | \geq 4r \int_K | < y, \theta > | \, \mathrm{d}y \} \right| \leq \mathrm{e}^{-\frac{r}{2}}.$$

Posons

$$M = \int_K | < y, \theta > | \, \mathrm{d}y.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_K |<x,\theta>|^p \,\mathrm{d}x &= \int_K \left(\int_0^{|<x,\theta>|} pt^{p-1}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} pt^{p-1}|\{x\in K\,;\, |<x,\theta>|\geq t\}|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} p(sM)^{p-1}|\{x\in K\,;\, |<x,\theta>|\geq sM\}|M\,\mathrm{d}s \\
&= M^p\left(\int_0^{\frac14} ps^{p-1}|\{x\in K\,;\, |<x,\theta>|\geq sM\}|\,\mathrm{d}s\right. \\
&\qquad \left. + \int_{\frac14}^{+\infty} ps^{p-1}|\{x\in K\,;\, |<x,\theta>|\geq sM\}|\,\mathrm{d}s\right) \\
&\leq M^p\left(\frac{1}{4^p} + \int_{\frac14}^{+\infty} ps^{p-1}\mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}\,\mathrm{d}s\right) \\
&\leq M^p\left(\frac{1}{4^p} + p\int_0^{+\infty} (2u)^{p-1}\mathrm{e}^{-u}2\,\mathrm{d}u\right) \\
&= M^p\left(\frac{1}{4^p} + 2^p p\,!\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left(\int_K |<x,\theta>|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1p} \leq M\left(\frac{1}{4^p}+2^p p\,!\right)^{\frac1p} \leq M\left(\frac14+2p\right)\leq 3pM.$$

Autrement dit,

$$\left(\int_K |<x,\theta>|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1p} \leq 3p\int_K |<x,\theta>|\,\mathrm{d}x.$$

□

On a de manière équivalente (cf. théorème C.1.5),

Proposition D.2.5. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1. Pour tout $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$,*

$$\int_K \mathrm{e}^{\frac{|<x,\theta>|}{CM}}\,\mathrm{d}x \leq 2$$

où $C>0$ est une constante universelle et $M=\int_K |<y,\theta>|\,\mathrm{d}y$.

Proposition D.2.6. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1. Pour tout $\theta\in\mathbb{S}^{n-1}$ et tout $s>0$,*

$$|\{x\in K\,;\,|<x,\theta>|\geq CMs\}|\leq 2\mathrm{e}^{-s}$$

où $C>0$ est une constante universelle et $M=\int_K |<y,\theta>|\,\mathrm{d}y$.

Nous aimerions avoir une meilleure estimation de la constante C. Pour ce faire, nous allons traiter le cas que nous avons souvent utilisé, il s'agit du cas $p = 2$. La démonstration n'a donc rien à voir avec ce qui précède.

Proposition D.2.7. *Soit K un corps convexe de $(\mathbb{R}_+)^n$ de volume 1. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,*

$$\int_K < x, \theta > \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_K < x, \theta >^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. On considère deux fonctions f et g positives à support dans $\mathbb{R}_+$ telles que f soit $\frac{1}{n}$-concave et g soit $\frac{1}{n}$-affine et $f \neq g$. De plus, on suppose que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, on suppose que $a = g(0)$ et $g(b) = 0$, $f(M) = 0$ où $0 < M$, de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$g(t)^{\frac{1}{n}} = a\left(1 - \frac{t}{b}\right) \mathbf{1}_{[0,b]}(t).$$

Posons $h = g - f$, alors d'après les hypothèses

$$\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} th(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et soit h est de signe constant, soit h change de signe une fois, soit h change de signe deux fois. Si h est de signe constant alors l'intégrale ci-dessus implique que $h = 0$, or on a justement supposé que $f \neq g$, donc h change de signe une fois ou deux fois.

On pose

$$H(t) = \int_t^{+\infty} h(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}(t) = \int_t^{+\infty} H(s)\,\mathrm{d}s.$$

On a,

$$0 = \int_0^{+\infty} th(t)\,\mathrm{d}t = \left[-t\int_t^{+\infty} h(s)\,\mathrm{d}s\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} h(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} H(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, $\mathcal{H}(0) = 0$. Puisque $\mathcal{H}(+\infty) = 0$, alors si h ne changeait qu'une seule fois de signe en un point $t_1 > 0$, on aurait le tableau de variations suivant, en précisant que $H' = -h$ et $\mathcal{H}' = -H$,

t	0		t_1		$+\infty$
h		$+$		$-$	
	0				0
H		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-$		
					0
$\mathcal{H}$			$\nearrow$		
	0				

Donc $\mathcal{H} = 0$, ce qui est contradictoire car $h \neq 0$. Par conséquent, h change de signe exactement deux fois en deux points $0 < t_1 < t_2$. Il s'ensuit que $g(0) > f(0)$ et $f(M) = 0$ pour un certain $0 < M < b$. On a finalement le tableau de variations suivant,

t	0		t_1		t_2		$+\infty$
h		$+$		$-$		$+$	
	0				$+$		
H		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-$				0
				$+$			
$\mathcal{H}$			$\nearrow$		$\searrow$		
	0						0

Par conséquent, la fonction $\mathcal{H}$ est positive. Ce qui implique,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^2 h(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-t^2 \int_t^{+\infty} h(s)\,\mathrm{d}s\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} t \int_t^{+\infty} h(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{+\infty} tH(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left(\left[-t\int_t^{+\infty} H(s)\,\mathrm{d}s\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} H(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right) \\
&= 2\int_0^{+\infty} \mathcal{H}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On va appliquer ce travail préliminaire à des fonctions f et g bien particulières. Tout d'abord, par Fubini on a pour toute fonction ϕ continue et pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\int_K \phi(< x, \theta >) \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \phi(t) |\{x \in K \, ; \, < x, \theta >= t\}|_{n-1} \, \mathrm{d}t.$$

On prend alors pour f la fonction

$$f : t \mapsto |\{x \in K \, ; \, < x, \theta >= t\}|_{n-1}$$

qui est $\frac{1}{n-1}$-concave d'après l'inégalité de Brunn-Minkowski et est à support dans $[0, M]$ pour un certain $M > 0$ car K est borné. On considère alors pour g une fonction $\frac{1}{n-1}$-affine. Donc, pour tout $t \in [0, b]$,

$$g(t) = a \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{n-1}$$

toujours avec $0 < M < b$. Le but est de déterminer a et b. On a

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_K \, \mathrm{d}x = 1$$

et

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t) \, \mathrm{d}t = \int_K < x, \theta >^2 \, \mathrm{d}x.$$

On peut alors déterminer a et b qui ont été introduit de telle sorte que

$$\int_0^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t g(t) \, \mathrm{d}t.$$

On calcule,

$$1 = \int_0^{+\infty} g(t) \, \mathrm{d}t = a \int_0^b \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{n-1} \, \mathrm{d}t = ab \int_0^1 u^{n-1} \, du = \frac{ab}{n}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t g(t) \, \mathrm{d}t &= a \int_0^b t \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{n-1} \, \mathrm{d}t \\ &= ab^2 \int_0^1 (1-u) u^{n-1} \, du \\ &= ab^2 \left(\int_0^1 u^{n-1} \, du - \int_0^1 u^n \, du \right) \\ &= \frac{ab^2}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} t g(t) \, \mathrm{d}t = \frac{ab^2}{n(n+1)} = \int_0^{+\infty} t f(t) \, \mathrm{d}t.$$

On a donc le système

$$\begin{cases} \frac{ab^2}{n(n+1)} & = \int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ \frac{ab}{n} & = 1 \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} ab & = n \\ b & = (n+1)\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Pour finir,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}t &= a\int_0^b t^2\left(1-\frac{t}{b}\right)^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= ab^3\int_0^1 (1-u)^2 u^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= ab^3\int_0^1 (u^{n-1}-2u^n+u^{n+1})\,du \\ &= ab^3\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{2ab^3}{n(n+1)(n+2)} \\ &= 2\frac{b^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= 2\frac{n+1}{n+2}\left(\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\left(\int_0^{+\infty} t^2 g(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement,

$$\int_K < x,\theta > \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_K < x,\theta >^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

En particulier, en choisissant $\theta = e_j$, on obtient

$$\int_K x_j\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_K x_j^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Gardons bien en tête cette démonstration, elle nous servira de prototype pour le résultat très général suivant, démontré par Borell dans [BOR3].

Théorème D.2.8. *Pour tout $p > -1$, la fonction*

$$\phi : p \mapsto \frac{1}{\mathcal{B}(p+1,n)} \int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$$

est log-concave dès que f est $\frac{1}{n-1}$-concave sur son support.

Démonstration. Soient p, q, r trois nombres réels tels que $-1 < p < q < r$. Alors il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $q = (1-\lambda)p + \lambda r = p + \lambda(r-p)$. Donc, $\lambda = \frac{q-p}{r-p}$ et $1 - \lambda = \frac{r-q}{r-p}$. On veut montrer que

$$\phi(q) \geq \phi(p)^{1-\lambda}\phi(r)^{\lambda}$$

ce qui revient à montrer que

$$\phi(r) \leq \left(\frac{\phi(q)}{\phi(p)^{1-\lambda}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction $\frac{1}{n-1}$-concave à support dans $[0, M]$ où $M > 0$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction $\frac{1}{n-1}$-affine à support dans $[0, b]$ où $b > 0$, autrement dit,

$$g(t) = a\left(1 - \frac{t}{b}\right)^{n-1} \mathbf{1}_{[0,b]}(t)$$

où a et b sont tels que

$$\int_0^{+\infty} t^p g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} t^q g(t)\,\mathrm{d}t \int_0^{+\infty} t^q f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose $h = g - f$. On suppose $g \neq f$, donc $h \neq 0$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} t^p h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^q h(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrons que

$$\int_0^{+\infty} t^r h(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

On pose $H(t) = \int_t^{+\infty} s^p h(s)\,\mathrm{d}s$ et $\mathcal{H}(t) = \int_t^{+\infty} s^{q-p-1} h(s)\,\mathrm{d}s$. Par hypothèses, $H(0) = H(+\infty) = \mathcal{H}(+\infty) = 0$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{+\infty} t^q h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} t^{q-p} t^p h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-t^{q-p} H(t)\right]_0^{+\infty} + (q-p)\int_0^{+\infty} t^{q-p-1} h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (q-p)\int_0^{+\infty} t^{q-p-1} h(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{H}(0) = 0$. On en conclut que h change exactement deux fois de signe, sinon on aurait $\mathcal{H} = 0$, ce qui contredit $h \neq 0$. On a ainsi le tableau de variations suivant,

t	0		t_1		t_2		$+\infty$
h		$+$		$-$		$+$	
$t^p h$		$+$		$-$		$+$	
$H(t) = \int_t^{+\infty} s^p h(s)\,\mathrm{d}s$	0	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0
$t^{q-p-1} H(t)$	0	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0
$\mathcal{H}(t) = \int_t^{+\infty} s^{q-p-1} H(s)\,\mathrm{d}s$	0		$\nearrow$	$+$	$\searrow$		0

En conclusion, $\mathcal{H}$ est positive. Ce qui implique,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^r h(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} t^{r-p} t^p h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-t^{r-p} H(t)\right]_0^{+\infty} + (r-p)\int_0^{+\infty} t^{r-p-1} h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (r-p)\int_0^{+\infty} t^{r-q} t^{q-p-1} h(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (r-p)\left(\left[-t^{r-p}\mathcal{H}(t)\right]_0^{+\infty} + (r-q)\int_0^{+\infty} t^{r-q-1}\mathcal{H}(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= (r-p)(r-q)\int_0^{+\infty} t^{r-q-1}\mathcal{H}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} t^r g(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^p g(t)\,\mathrm{d}t &= a\int_0^b t^p \left(1 - \frac{t}{b}\right)^{n-1} \mathrm{d}t \\
&= a\int_0^1 (bu)^p (1-u)^{n-1} b\,\mathrm{d}u \\
&= ab^{p+1}\int_0^1 u^p (1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u \\
&= ab^{p+1}\mathcal{B}(p+1, n).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{ab^{q+1}}{ab^{p+1}} = b^{q-p} = \frac{\phi(q)}{\phi(p)}.$$

Donc,

$$b = \left(\frac{\phi(q)}{\phi(p)}\right)^{\frac{1}{q-p}} = \left(\frac{\phi(q)}{\phi(p)}\right)^{\frac{1}{\lambda(r-p)}}.$$

Par conséquent,

$$a = \frac{1}{b^{q+1}}\phi(q) = \frac{\phi(q)^{1-\frac{q+1}{\lambda(r-p)}}}{\phi(p)^{-\frac{q+1}{\lambda(r-p)}}}.$$

Par ailleurs, nous avons montré que

$$\int_0^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} t^r g(t)\,\mathrm{d}t = ab^{r+1}\mathcal{B}(r+1,n).$$

Ainsi,

$$\phi(r) \le ab^{r+1} = \frac{\phi(q)^{1-\frac{q+1}{\lambda(r-p)}+\frac{r+1}{\lambda(r-p)}}}{\phi(p)^{-\frac{q+1}{\lambda(r-p)}+\frac{r+1}{\lambda(r-p)}}}.$$

Or,

$$1 - \frac{q+1}{\lambda(r-p)} + \frac{r+1}{\lambda(r-p)} = 1 + \frac{r-q}{\lambda(r-p)} = 1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Donc,

$$\phi(r) \le \frac{\phi(q)^{\frac{1}{\lambda}}}{\phi(p)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}.$$

Par conséquent, ϕ est log-concave.

□

Le résultat subsiste si l'on suppose f log-concave. La démonstration est identique, il faut juste remplacer g par log-affine au lieu de $\frac{1}{n}$-affine.

Corollaire D.2.9. *Pour tout $p > -1$, la fonction*

$$\phi : p \mapsto \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$$

est log-concave dès que f est $\frac{1}{n-1}$-concave sur son support.

Démonstration. Soient $p, q > -1$ et $\lambda \in [0,1]$. D'après le theorème D.2.8, en notant $u = (1-\lambda)p + \lambda q + n + 2$, on a

$$\frac{\Gamma(u)}{\Gamma(n)}\phi((1-\lambda)p+\lambda q) \ge \left(\frac{\Gamma(p+n+2)}{\Gamma(n)}\right)^{1-\lambda} \phi(p)^{1-\lambda} \left(\frac{\Gamma(q+n+2)}{\Gamma(n)}\right)^{\lambda} \phi(q)^{\lambda}.$$

Par conséquent,

$$\phi((1-\lambda)p+\lambda q) \geq \frac{\Gamma(p+n+2)^{1-\lambda}\Gamma(q+n+2)^{\lambda}}{\Gamma((1-\lambda)p+\lambda q+n+2)}\phi(p)^{1-\lambda}\phi(q)^{\lambda} \geq \phi(p)^{1-\lambda}\phi(q)^{\lambda}$$

la dernière inégalité provenant de la log-convexité de la fonction Γ.

□

Corollaire D.2.10. *Soit K un corps convexe de $(\mathbb{R}_+)^n$ de volume 1. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,*

$$\int_K <x,\theta> \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_K <x,\theta>^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. On considère la fonction $\phi : p \mapsto \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$. Nous avons montré dans le corollaire D.2.9 que ϕ est log-concave sur $]-1,+\infty[$ dès que f est $\frac{1}{n}$-concave. Par conséquent,

$$\phi(1) \geq \sqrt{\phi(0)\phi(2)}.$$

Or, $\phi(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\phi(1) = \int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $\phi(2) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. On prend comme d'habitude pour f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f : t \mapsto |\{x \in K\,;\, <x,\theta>= t\}|_{n-1}$$

où K est un corps convexe de $(\mathbb{R}_+)^n$ de volume 1. On obtient par Fubini, que $\phi(0) = 1$, $\phi(1) = \int_K <x,\theta> \,\mathrm{d}x$ et $\phi(2) = \frac{1}{2}\int_K <x,\theta>^2 \,\mathrm{d}x$. Donc,

$$\int_K <x,\theta> \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_K <x,\theta>^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Corollaire D.2.11 (Théorème de Karlin-Proschan-Barlow)**.** *Soit ξ une variable aléatoire positive à densité log-concave sur $]0,+\infty[$. Alors, pour tout réel $s \geq 1$,*

$$\mathbb{E}[\xi^s] \leq \Gamma(s+1)\left(\mathbb{E}[\xi]\right)^s.$$

Démonstration. L'énoncé est écrit en version probabiliste. Si on le traduit en version analytique, il faut montrer que pour tout réel $s \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} t^s f(t)\,\mathrm{d}t \leq \Gamma(s+1)\left(\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t\right)^s$$

où f est une fonction log-concave définie sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$ et telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. D'après le corollaire D.2.9, la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $\phi : p \mapsto \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$ est log-concave puisque f est log-concave. Par conséquent,

$$\phi(1) = \phi\left(\left(1-\frac{1}{s}\right)0 + \left(\frac{1}{s}\right)s\right) \geq \phi(0)^{1-\frac{1}{s}}\phi(s)^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^{+\infty} t^s f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} t^s f(t)\,\mathrm{d}t \leq \Gamma(s+1)\left(\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^s.$$

$\square$

Pour la démonstration d'origine du théorème de Karlin-Proschan-Barlow, on peut consulter leur article [KAR].

Pourtant, le théorème de Karlin-Proschan-Barlow généralise déjà les inégalités de type Khintchine dans le cas symétrique. En effet, soit $s \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\xi^s] = \int_{\mathbb{R}_+} t^s f(t)\,\mathrm{d}t \leq \Gamma(s+1)\left(\int_{\mathbb{R}_+} t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^s = \Gamma(s+1)\left(\mathbb{E}[\xi]\right)^s$$

où f est une densité log-concave. Si on prend pour f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto |\{x \in K\,;\, <x,\theta>= t\}|_{n-1}$ où K est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1 et symétrique, alors f est paire et on a

$$\frac{1}{2}\int_K |<x,\theta>|^s\,\mathrm{d}x \leq \Gamma(s+1)\left(\frac{1}{2}\int_K |<x,\theta>|\,\mathrm{d}x\right)^s.$$

Finalement,

$$\left(\int_K |<x,\theta>|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{(2\Gamma(s+1))^{\frac{1}{s}}}{2}\int_K |<x,\theta>|\mathrm{d}x \leq Cs\int_K |<x,\theta>|\mathrm{d}x$$

où $C > 0$ est une constante universelle.

On obtient ainsi des résultats de plus en plus généraux.

Corollaire D.2.12. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1 et symétrique. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$,*

$$\int_K |<x,\theta>|\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_K |<x,\theta>|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. Puisque l'ensemble K est symétrique, alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto |\{x \in K\,;\, <x,\theta>= t\}|_{n-1}$ est paire en plus d'être $\frac{1}{n-1}$-concave. On a alors par Fubini,

$$\int_K |<x,\theta>|^p\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |t|^p f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On applique alors le corollaire D.2.9,

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t} \quad \leq \quad \int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\sqrt{\frac{|K|}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_K |<x,\theta>|^2\,\mathrm{d}x} \leq \frac{1}{2}\int_K |<x,\theta>|\,\mathrm{d}x.$$

Finalement,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_K |<x,\theta>|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_K |<x,\theta>|\,\mathrm{d}x.$$

□

Corollaire D.2.13 (Inégalité de type Khintchine)**.** *On se donne K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ de volume 1 et symétrique. Soient $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ et f_θ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$, autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$f_\theta(x) = \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n.$$

Alors la norme $L^p(K)$ de f_θ vérifie pour tout $p \geq 1$,

$$\|f_\theta\|_{L^p(K)} \leq Cp\,\|f_\theta\|_{L^2(K)}.$$

On peut prendre $C = \sqrt{2}$.

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, alors par hypothèse, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f_\theta(x) = |<x,\theta>|$. D'après le corollaire D.2.9, la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ définie par $\phi : p \mapsto \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$ est log-concave dès que f est $\frac{1}{n}$-concave. On prend pour f la fonction $f : t \mapsto |\{x \in K\,;\, <x,\theta> = t\}|_{n-1}$ définie sur $\mathbb{R}$. Soit $p \geq 2$ un entier, alors

$$\phi(0)^{\frac{p-2}{p}}\phi(p)^{\frac{2}{p}} \leq \phi(2).$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{p!}\int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p}} &\leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\
2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p!}\frac{1}{2}\int_K |<x,\theta>|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\frac{1}{2}\int_K |<x,\theta>|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
\frac{1}{(p\,!)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_K |<x,\theta>|^p\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_K <x,\theta>^2\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{(p!)^{\frac{1}{p}}} \geq \frac{1}{(p^p)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{p}$. Finalement, pour tout entier $p \geq 2$,

$$\|f_\theta\|_{L^p(K)} \leq \frac{p}{\sqrt{2}}\|f_\theta\|_{L^2(K)}.$$

Maintenant, soit $p \geq 2$ un réel, alors il existe un entier $q \geq 2$ tel que $q \leq p \leq 2q$. Donc,

$$\|f_\theta\|_{L^p(K)} \leq \|f_\theta\|_{L^{2q}(K)} \leq \frac{2q}{\sqrt{2}}\|f_\theta\|_{L^2(K)} \leq \sqrt{2}p\|f_\theta\|_{L^2(K)}.$$

Pour $p \in [1,2]$, on utilise la croissance des normes $L^p(K)$.

De manière analogue, on démontre que

$$\|f_\theta\|_{L^p(K)} \leq p\,\|f_\theta\|_{L^1(K)}.$$

□

Précisons que l'inégalité de type Khintchine ne nécessite pas l'hypothèse de symétrie de K.

Proposition D.2.14. *Soit f une fonction positive décroissante. Alors, la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par*

$$\psi : p \mapsto (p+1)\int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$$

est log-convexe.

Démonstration. A partir des hypothèses de l'énoncé, on écrit en appliquant Fubini,

$$\psi(p) = (p+1)\int_0^{+\infty} t^p \left(\int_0^{f(t)} \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\max(f)}\left((p+1)\int_{\{t\geq 0\,;\, f(t)\geq s\}} t^p\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s.$$

On note $f^{-1}(s) = \sup\{t \geq 0\,;\, f(t) \geq s\}$. Donc, puisque f est décroissante, $\{t \geq 0\,;\, f(t) \geq s\} = [0, f^{-1}(s)]$. Ainsi,

$$\psi(p) = \int_0^{\max(f)}\left(\int_0^{f^{-1}(s)} (p+1)t^p\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \int_0^{\max(f)} f^{-1}(s)^{p+1}\,\mathrm{d}s.$$

On voit que $\psi(-1) = \max(f)$. Par conséquent, soient $p, r \in [-1,+\infty[$ et $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\psi((1-\lambda)p+\lambda r) &= \int_0^{\max(f)} f^{-1}(s)^{(1-\lambda)p+\lambda r+1}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\max(f)} f^{-1}(s)^{(1-\lambda)(p+1)} f^{-1}(s)^{\lambda(r+1)}\,\mathrm{d}s \\
&\leq \left(\int_0^{\max(f)} f^{-1}(s)^{p+1}\,\mathrm{d}s\right)^{1-\lambda}\left(\int_0^{\max(f)} f^{-1}(s)^{r+1}\,\mathrm{d}s\right)^{\lambda} \\
&= \psi(p)^{1-\lambda}\psi(r)^{\lambda}.
\end{aligned}$$

Finalement, la fonction ψ est log-convexe sur $[-1,+\infty[$.

□

Nous allons maintenant généraliser les inégalités de Hensley que l'on retrouve dans [HEN].

Corollaire D.2.15 (Inégalité de Hensley — Majoration). *Soit f une densité de probabilité log-concave paire sur $\mathbb{R}$ atteignant son maximum à l'origine. Alors,*

$$f(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Démonstration. On reprend les hypothèses de l'énoncé. Alors, la densité f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, la fonction $\phi : p \mapsto \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$ est log-concave sur $[-1,+\infty[$ en incluant -1 et d'après le corollaire D.2.9. Donc,

$$\phi(0) = \phi\left(\left(\frac{2}{3}\right)(-1) + \left(\frac{1}{3}\right)2\right) \geq \phi(-1)^{\frac{2}{3}}\phi(2)^{\frac{1}{3}}.$$

Or, en se servant de la fonction ψ de la proposition D.2.14,

$$\phi(p) = \frac{1}{(p+1)\Gamma(p+1)}\int_0^{\max(f)} f^{-1}(s)^{p+1}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\Gamma(p+2)}\int_0^{\max(f)} f^{-1}(s)^{p+1}\,\mathrm{d}s.$$

Donc, $\phi(-1) = \max(f) = f(0)$. Ainsi,

$$f(0)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{3}} \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, en utilisant la parité de f,

$$f(0)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$f(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{4^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

□

Corollaire D.2.16 (Inégalité de Hensley — Minoration). *Soit f une densité de probabilité log-concave paire sur $\mathbb{R}$ atteignant son maximum à l'origine, alors*

$$f(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Démonstration. Soit f une densité de probabilité log-concave paire sur $\mathbb{R}$ atteignant son maximum à l'origine. Alors, f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après la proposition D.2.14, la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ définie par $\psi : p \mapsto (p+1)\int_0^{+\infty} t^p f(t)\,\mathrm{d}t$ est log-convexe. Donc,

$$\psi(-1)^{\frac{2}{3}}\psi(2)^{\frac{1}{3}} \geq \psi(0).$$

Autrement dit, en utilisant la parité de f,

$$f(0)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{3}} \geq \frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$f(0)\left(\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$\square$

La proposition suivante se trouve dans [MIL-PAJ], elle généralise l'inégalité de Hensley version minoration, qui est faite en toute dimension dans [HEN].

Proposition D.2.17. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive telle que $\|f\|_\infty = 1$ et soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ symétrique. Alors, la fonction*

$$F : p \mapsto F(p) = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K^p f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_K \|x\|_K^p\,\mathrm{d}x}\right)^{\frac{1}{n+p}}$$

est croissante sur $]-n;+\infty[$.

Démonstration. Soient $-n < q < p$ et $t > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K^p f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\|x\|_K \geq t}\|x\|_K^{p-q}\|x\|_K^q f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\|x\|_K \leq t}\|x\|_K^p f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\geq t^{p-q}\int_{\|x\|_K \geq t}\|x\|_K^q f(x)\,\mathrm{d}x + t^{p-q}\int_{\|x\|_K \leq t}\|x\|_K^q f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad -t^{p-q}\int_{\|x\|_K \leq t}\|x\|_K^q f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\|x\|_K \leq t}\|x\|_K^p f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= t^{p-q}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K^q f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\|x\|_K \leq t}(t^{p-q}\|x\|_K^q - \|x\|_K^p) f(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Puisque $\|f\|_\infty = 1$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{\|x\|_K \leq t}(t^{p-q}\|x\|_K^q - \|x\|_K^p) f(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\|x\|_K \leq t}(t^{p-q}\|x\|_K^q - \|x\|_K^p)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\|u\|_K \leq 1}(t^{p-q}\|tu\|_K^q - \|tu\|_K^p) f(x) t^n\,\mathrm{d}u \\
&= \int_K t^{p+n}(\|x\|_K^q - \|x\|_K^p)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^p f(x)\,\mathrm{d}x \geq t^{p-q} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^q f(x)\,\mathrm{d}x - \int_K t^{p+n}(\|x\|_K^q - \|x\|_K^p)\,\mathrm{d}x.$$

En choisissant $t = \left((n+q)\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^q f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n+q}}$, on obtient $F(p) \geq F(q)$.

□

Corollaire D.2.18 (Inégalité de Hensley — Minoration)**.** *Soit f une densité de probabilité atteignant son maximum à l'origine, alors*

$$f(0)^{\frac{2}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geq v_n^{-1-\frac{2}{n}} \int_{\mathcal{B}_2^n} |x|^2\,\mathrm{d}x$$

où v_n désigne le volume de la boule $\mathcal{B}_2^n$.

Démonstration. D'après la proposition D.2.17, $F(2) \geq F(0)$ où

$$F : p \mapsto F(p) = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^p \frac{f(x)}{\|f\|_\infty}\,\mathrm{d}x}{\int_K \|x\|_K^p\,\mathrm{d}x} \right)^{\frac{1}{n+p}}$$

de sorte que $\left\| \frac{f(x)}{\|f\|_\infty} \right\|_\infty = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \frac{f(x)}{\|f\|_\infty}\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathcal{B}_2^n} |x|^2\,\mathrm{d}x} \right)^{\frac{1}{n+2}} &\geq \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{\|f\|_\infty}\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathcal{B}_2^n} \mathrm{d}x} \right)^{\frac{1}{n}} \\
\frac{1}{\|f\|_\infty^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\,\mathrm{d}x \right)^n &\geq \left(\int_{\mathcal{B}_2^n} |x|^2\,\mathrm{d}x \right)^n \frac{1}{\|f\|_\infty^{n+2} v_n^{n+2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x \right)^{n+2}.
\end{aligned}$$

Si f atteint son maximum en 0 et $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, alors on obtient,

$$f(0)^{\frac{2}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geq v_n^{-1-\frac{2}{n}} \int_{\mathcal{B}_2^n} |x|^2\,\mathrm{d}x.$$

□

En particulier, en prenant $n = 1$, on obtient le corollaire D.2.16, sans avoir à supposer f log-concave.

D.3 Conjecture de Mahler et inégalité de Blaschke-Santaló

Dans cette section, nous allons démontrer la conjecture de Mahler dans le cas où l'ensemble considéré est un corps convexe inconditionnel. Nous suivons la démonstration élégante de [MEY].

Précisons que ce résultat a d'abord été démontré par Saint-Raymond.

Conjecture D.3.1. *Soit K un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note K° le polaire de K. Alors, on conjecture que*

$$|\mathcal{B}_1^n||\mathcal{B}_\infty^n| \leq |K||K^\circ|.$$

Théorème D.3.2. *La conjecture de Mahler est vraie lorsque l'on suppose de plus que l'ensemble K est inconditionnel.*

Démonstration. Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ inconditionnel. Pour fixer les idées, l'ensemble K est inconditionnel selon la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On procède par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à montrer que

$$\frac{4^n}{n!} \leq |K||K^\circ|$$

ce qui revient à montrer que

$$\frac{1}{n!} \leq |K^+||(K^\circ)^+|$$

puisque K et donc, d'après la proposition 3.1.12, K°, sont inconditionnels, en notant $K^+ = K \cap (\mathbb{R}_+)^n$.

Pour $n = 1$, l'ensemble K^+ est un intervalle compact de $\mathbb{R}_+$, disons $[0, a]$ où $a > 0$. Donc,

$$(K^\circ)^+ = \{y \in \mathbb{R}_+ \,;\, xy \leq 1, \forall x \in [0, a]\} = \{y \in \mathbb{R}_+ \,;\, y \leq \frac{1}{x}, \forall x \in [0, a]\} = [0, \frac{1}{a}].$$

Par conséquent,

$$|K^+||(K^\circ)^+| = |K^+|\frac{1}{|K^+|} = 1.$$

On suppose la propriété vraie à l'ordre $n-1$. Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ inconditionnel. On note $K_i = \mathrm{P}_{e_i^\perp}(K)$. D'après les propositions 3.1.10 et 3.1.11, $(K^+)_i = K^+ \cap e_i^\perp = (K_i)^+$, donc nous noterons indifféremment K_i^+ pour $(K^+)_i$ ou $(K_i)^+$. Soit $x \in K^+$, alors

$$|K^+| \geq |\cup_{i=1}^n \mathrm{conv}(x, K_i^+)| = \sum_{i=1}^n |\mathrm{conv}(x, K_i^+)| = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i||K_i^+|}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i|K_i^+|}{n}.$$

Ainsi, en notant $y_{0,i} = \frac{|K_i^+|}{n|K^+|}$, alors $< x, y_0 > \leq 1$. Ainsi, $y_0 \in (K^+)^\circ$. De plus, $y_0 \in (\mathbb{R}_+)^n$. D'autre part, soit $x \in K$, alors

$$< x, y_0 > = \sum_{i=1}^n x_i y_{0,i} \leq \sum_{i=1}^n |x_i||y_{0,i}| = \sum_{i=1}^n |x_i| y_{0,i}.$$

Donc, $y_0 \in K^\circ \cap (\mathbb{R}_+)^n = (K^\circ)^+$. Par conséquent,

$$|(K^\circ)^+| \geq |\cup_{i=1}^n \mathrm{conv}(y_0, (K^\circ)_i^+)| = \sum_{i=1}^n \frac{|y_{0,i}||(K^\circ)_i^+|}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \frac{|K_i^+||(K^\circ)_i^+|}{|K^+|}.$$

Donc,

$$|(K^\circ)^+||K^+| \geq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}|K_i^+||(K^\circ)_i^+|.$$

Or, en utilisant les propositions 3.1.10, 3.1.12 et 1.6.12,

$$(K^\circ)_i^+ = K^\circ \cap e_i^\perp \cap (\mathbb{R}_+)^n = (\mathrm{P}_{e_i^\perp}(K))^\circ \cap (\mathbb{R}_+)^n = (K\cap e_i^\perp)^\circ \cap (\mathbb{R}_+)^n = ((K_i)^\circ)^+.$$

Par conséquent,

$$|(K^\circ)^+||K^+| \geq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}|K_i^+||((K_i)^\circ)^+| \geq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}.$$

□

Nous terminons par l'énoncé de l'inégalité de Blaschke-Santaló sans donner de démonstration. Pour plus de détails, on pourra consulter [LEI].

Théorème D.3.3 (Inégalité de Blaschke-Santaló)**.** *Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, qui n'est pas contenu dans un hyperplan. Alors,*

$$|K||K^\circ| \leq |\mathcal{B}_2^n|^2.$$

D.4 Inégalité de Loomis-Whitney

Dans cette section nous étudions l'inégalité de Loomis-Whitney dont l'article de référence est [LOO]. Nous proposons ici une autre démonstration.

Théorème D.4.1 (Inégalité de Loomis-Whitney)**.** *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et soient $\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)$ les projections de K sur les hyperplans $e_j^\perp$, $j \in \{1,\ldots,n\}$. Alors,*

$$|K|^{n-1} \leq \prod_{j=1}^{n}|\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)|_{n-1}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, on a de manière évidente que $K \subset \mathrm{P}_{e_1^\perp}(K) \times \mathrm{P}_{e_2^\perp}(K)$. Par conséquent, $|K| \leq \prod_{j=1}^{2}|\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)|_1$.

On suppose la propriété vrai au rang $n-1$. D'après Fubini, on a

$$|K| = \int_{\mathbb{R}} |\{x \in K\,;\, <x, e_1> = x_1\}|_{n-1}\,\mathrm{d}x_1 = \int_{\mathbb{R}} |K(x_1)|_{n-1}\,\mathrm{d}x_1$$

où on a noté $K(x_1) = \{x \in K\,;\, < x, e_1 >= x_1\}$. Ensuite,

$$\begin{array}{rrcl} & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |K(x_1)|_{n-1}\,\mathrm{d}x_1 & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |K(x_1)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\,|K(x_1)|_{n-1}^{\frac{n-2}{n-1}}\,\mathrm{d}x_1 \\ & & \le & \displaystyle\max_{x_1\in\mathbb{R}} |K(x_1)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |K(x_1)|_{n-1}^{\frac{n-2}{n-1}}\,\mathrm{d}x_1 \\ & (\mathrm{HR}) & \le & \displaystyle\max_{x_1\in\mathbb{R}} |K(x_1)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=2}^{n} |\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K(x_1))|_{n-2}^{\frac{1}{n-1}}\,\mathrm{d}x_1 \\ & (\text{Hölder}) & \le & \displaystyle\max_{x_1\in\mathbb{R}} |K(x_1)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K(x_1))|_{n-2}\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{array}$$

Or, $\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K(x_1)) = (\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K))(x_1)$. En effet,

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{P}_{e_j^\perp}(K(x_1)) & = & \{x \in e_j^\perp\,;\, \exists\lambda\in\mathbb{R}, x+\lambda e_j \in K(x_1)\} & \\ & = & \{x \in e_j^\perp\,;\, \exists\lambda\in\mathbb{R}, < x+\lambda e_j, e_1 >= x_1\} & \\ & = & \{x \in e_j^\perp\,;\, \exists\lambda\in\mathbb{R}, < x, e_1 >= x_1\} & (j\in\{2,\dots,n\}) \\ & = & \{x \in \mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)\,;\, < x, e_1 >= x_1\} & \\ & = & (\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K))(x_1) & \end{array}$$

et $\max_{x_1\in\mathbb{R}} |K(x_1)|_{n-1} \le |\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|_{n-1}$. En effet, soit $x_1 \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{array}{rcl} K(x_1) - x_1 e_1 & = & \{x \in e_1^\perp\,;\, x + x_1 e_1 \in K\} \\ & \subset & \{x \in e_1^\perp\,;\, \exists\lambda\in\mathbb{R}, x+\lambda e_1 \in K\} \\ & = & \mathrm{P}_{e_1^\perp}(K). \end{array}$$

Donc,

$$|K(x_1)| = |K(x_1) - x_1 e_1| \le |\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|.$$

Par conséquent,

$$|K| \le |\mathrm{P}_{e_1^\perp}(K)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}} |(\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K))(x_1)|_{n-2}\,\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{j=1}^{n} |\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)|_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Finalement,

$$|K|^{n-1} \le \prod_{j=1}^{n} |\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K)|_{n-1}.$$

□

Nous allons maintenant présenter une forme fonctionnelle de l'inégalité de Loomis-Whitney dont la démonstration figure dans [BOB-NAZ1].

Lemme D.4.2. *Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante et soit α un réel appartenant à $]0, 1]$. Alors,*

$$\left(\int_0^{+\infty} \phi(t)^\alpha \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \int_0^{+\infty} \phi(t^\alpha) \,\mathrm{d}t.$$

Première démonstration. On note

$$F = \{\phi\, ;\, \phi :]0; +\infty[\to \mathbb{R}_+ \text{décroissante}\}.$$

$$\mathcal{E} = \{\phi \in F\, ;\, \phi = c\mathbf{1}_{]0;a]}, a > 0, c > 0\}.$$

Il est clair que F est un cône convexe. On va montrer que $\mathcal{E}$ est exactement l'ensemble des points extrémaux de F, que l'on note $\mathrm{extr}(F)$.

Soit $\phi \in \mathcal{E}$ telle que $\phi = \phi_1 + \phi_2$ avec $\phi_1, \phi_2 \in F$. Supposons que ϕ_1 n'est pas constante, alors il existe $0 < x < y$ tels que $\phi_1(x) > \phi_2(y)$. Ainsi,

$$\phi_2(x) = c\mathbf{1}_{]0;a]}(x) - \phi_1(x) < c\mathbf{1}_{]0;a]}(x) - \phi_1(y) = \phi_2(y).$$

Ce qui est contradictoire car ϕ_2 est décroissante. Par conséquent, ϕ_1 est constante. Donc, ϕ_2 est également constante. Ainsi, $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}_+\phi$. Donc, $\phi \in \mathrm{extr}(F)$. D'où $\mathcal{E} \subset \mathrm{extr}(F)$.

Soit $\phi \notin \mathcal{E}$. Alors, il existe $0 < x_0 < y_0$ tels que $\phi(x_0) > \phi(y_0)$. On définit

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \phi(y_0) & \text{si } 0 < x \leq y_0 \\ \phi(x) & \text{si } x > y_0 \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \phi(x) - \phi_1(x) = \begin{cases} \phi(x) - \phi(y_0) & \text{si } 0 < x \leq y_0 \\ 0 & \text{si } x > y_0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\phi = \phi_1 + \phi_2$ avec $\phi_1 \notin \mathbb{R}_+\phi$ et $\phi_2 \notin \mathbb{R}_+\phi$. Donc, ϕ n'est pas extrémal. Par contraposée, on a montré que $\mathrm{extr}(F) \subset \mathcal{E}$.

Montrons que l'inégalité est bien vérifiée pour les points extrémaux de F. Soit $\phi \in F$ telle que $\phi = c\mathbf{1}_{]0;a]}$ où $a, c > 0$. Alors,

$$\left(\int_0^{+\infty} \phi(t)^\alpha \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_0^{a} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}} = a^{\frac{1}{\alpha}}$$

et,

$$\int_0^{+\infty} \phi(t^\alpha) \,\mathrm{d}t = \int_0^{a^{\frac{1}{\alpha}}} = a^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On conclut en appliquant le théorème de Krein-Milman.

□

Deuxième démonstration. On suppose que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors,

$$\int_0^{+\infty} \phi(t^\alpha)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha}\phi(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{\alpha}}(-\phi'(s))\,\mathrm{d}s$$

et, par décroissance,

$$\phi(t) = -\int_t^{+\infty} \phi'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_0^{+\infty} \phi'(s)\mathbf{1}_{[0,s]}(t)\,\mathrm{d}s$$

Puisque $\|.\|_\alpha$ est concave, alors

$$\begin{aligned}
\|\phi(.)\|_\alpha &= \left\|-\int_0^{+\infty} \phi'(s)\mathbf{1}_{[0,s]}(t)\,\mathrm{d}s\right\|_\alpha \\
&\geq \int_0^{+\infty} -\phi'(s)\|\mathbf{1}_{[0,s]}(.)\|_\alpha\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{\alpha}}(-\phi'(s))\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{+\infty} \phi(t^\alpha)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

□

Proposition D.4.3 (Version fonctionnelle de l'inégalité de Loomis-Whitney)**.** *Soit g une fonction mesurable positive définie sur $\mathbb{R}^n$. On définit pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ les fonctions*

$$g_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n) = \sup_{x_j\in\mathbb{R}} g(x_1,\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n).$$

Alors,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{\frac{n}{n-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{n-1} \leq \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On définit les ensembles de niveaux pour tout $t \geq 0$ par

$$K(t) = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, g(x) > t\} \qquad \text{et} \qquad K_j(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1}\,;\, g_j(x) > t\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{e_j^\perp}(K(t)) &= \{x \in e_j^\perp\,;\, \exists\lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda e_j \in K(t)\} \\
&= \{x \in e_j^\perp\,;\, \exists\lambda \in \mathbb{R}, g(x_1,\dots,\lambda,\dots,x_n) > t\} \\
&= \{x \in e_j^\perp\,;\, \sup_{x_j\in\mathbb{R}} g(x_1,\dots,x_j,\dots,x_n) > t\} \\
&= K_j(t).
\end{aligned}$$

Donc, les ensembles $K_j(t)$ sont les projections de l'ensemble $K(t)$ sur les hyperplans $e_j^{\perp}$. On applique alors l'inégalité de Loomis-Whitney pour les ensembles,

$$|K(t)|_n^{n-1} \leq \prod_{j=1}^{n} |K_j(t)|_{n-1}.$$

Par conséquent, en élevant dans cette inégalité à la puissance $\frac{1}{n}$, en intégrant sur $\mathbb{R}_+$ et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_0^{+\infty} |K(t)|_n^{\frac{n-1}{n}} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \prod_{j=1}^{n} |K_j(t)|_{n-1}^{\frac{1}{n}} \,\mathrm{d}t \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} |K_j(t)|_{n-1} \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{n}}.$$

La fonction $t \mapsto |K(t)|_n$ étant décroissante,

$$\int_0^{+\infty} |K(t)|_n^{\frac{n-1}{n}} \,\mathrm{d}t = \left(\int_0^{+\infty} |K(t)|_n^{\frac{n-1}{n}} \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}} \geq \left(\int_0^{+\infty} |K(t^{\frac{n-1}{n}})|_n \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Or,

$$|K(t^{\frac{n-1}{n}})|_n = |\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, g(x) > t^{\frac{n-1}{n}}\}|_n = |\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, g(x)^{\frac{n}{n-1}} > t\}|_n.$$

Donc, en appliquant Fubini,

$$\left(\int_0^{+\infty} |K(t^{\frac{n-1}{n}})|_n \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{\frac{n}{n-1}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

D'autre part, toujours par Fubini,

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\int_0^{+\infty} |K_j(t)|_{n-1} \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_j(x) \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Finalement,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{\frac{n}{n-1}} \,\mathrm{d}x \right)^{n-1} \leq \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_j(x) \,\mathrm{d}x.$$

□

On retrouve l'inégalité de Loomis-Whitney pour les ensembles, en prenant pour g la fonction $\mathbf{1}_K$.

Annexe E

Volume des boules

Dans cette partie, nous allons calculer le volume des boules associées aux normes $\|.\|_{\ell_p^n}$ pour tout $p \geq 1$. Dans un premier temps, nous allons le faire pour $p = 1, 2, +\infty$ d'une certaine manière, puis nous verrons qu'une méthode directe permet de calculer le volume de toutes les boules.

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_{\ell_p^n} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ et la boule unité centrée de ces normes est l'ensemble $\mathcal{B}_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_{\ell_p^n} \leq 1\}$.

E.1 Volume de la boule $\mathcal{B}_1^n$

Un moyen de connaître le volume de la boule $\mathcal{B}_1^n$ est de calculer l'intégrale

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_{\ell_1^n} \leq 1\}} \mathrm{d}x.$$

Et on remarque que cette intégrale est égale à

$$2^n \int_{\Delta_n} \mathrm{d}x$$

où $\Delta_n = \{x \in (\mathbb{R}_+)^n \,;\, x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$.

Lemme E.1.1. *Soient $p_1, \ldots, p_n$ des réels strictement positifs, alors*

$$\int_{\Delta_n} x_1^{p_1 - 1} \ldots x_n^{p_n - 1} \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \frac{\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n + 1)}$$

où $\Delta_n = \{x \in (\mathbb{R}_+)^n \,;\, x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$.

Démonstration. Soient $p_1, \dots, p_n$ des réels strictement positifs, alors

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} \Gamma(p_i) &= \prod_{i=1}^{n} \int_0^{+\infty} t_i^{p_i-1} \mathrm{e}^{-t_i}\,\mathrm{d}t_i \\
&= \int_{(\mathbb{R}_+)^n} \prod_{i=1}^{n} t_i^{p_i-1} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n t_i}\,\mathrm{d}t_i \\
&= \int_{(\mathbb{R}_+)^n} \prod_{i=1}^{n} t_i^{p_i-1} \left(\int_{\sum_{i=1}^n t_i}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t_i \\
\text{(Fubini)} &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\sum_{i=1}^n t_i \leq u\,,\, t_i \geq 0} \prod_{i=1}^{n} t_i^{p_i-1} \mathrm{d}t_i \right) \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\
(t_i = u x_i) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\sum_{i=1}^n x_i \leq 1\,,\, x_i \geq 0} \prod_{i=1}^{n} u^{p_i-1} x_i^{p_i-1} u \mathrm{d}x_i \right) \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\Delta_n} x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \int_0^{+\infty} u^{\sum_{i=1}^n p_i} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\Delta_n} x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_{\Delta_n} x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1}\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1)}$$

où $\Delta_n = \{x \in (\mathbb{R}_+)^n \,;\, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$.

□

On déduit de ce lemme que

$$\int_{\Delta_n} \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(1)^n}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n!}.$$

Par conséquent, le volume de la boule $\mathcal{B}_1^n$ est $\frac{2^n}{n!}$.

E.2 Volume de la boule $\mathcal{B}_2^n$

Dans [BAL], on retrouve le calcul du volume de la boule $\mathcal{B}_2^n$ ainsi que des informations intéressantes sur la concentration de ce volume.

On note v_n le volume de la boule $\mathcal{B}_2^n$. On rappelle que la mesure sphérique $\widetilde{\sigma}$ sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ peut être définie, pour toute partie A mesurable de $\mathbb{S}^{n-1}$, par la mesure de Lebesgue du cône engendré, multiplié par n, c'est-à-dire

$$\widetilde{\sigma}(A) = n|\{tu \,;\, t \in [0,1], u \in A\}| = n| \cup_{t \in [0,1]} tA|.$$

On montre aussi que $\widetilde{\sigma}$ est, à une constante multiplicative près, l'unique mesure borélienne sur $\mathbb{S}^{n-1}$ invariante par rotations.

On rappelle la formule d'intégration en polaire, pour toute fonction f de $L_1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\theta)r^{n-1}\,\mathrm{d}\widetilde{\sigma}\,\mathrm{d}r.$$

On note σ la mesure de probabilité correspondante sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, c'est-à-dire

$$\sigma = \frac{1}{\widetilde{\sigma}(\mathbb{S}^{n-1})}\widetilde{\sigma}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable , alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\theta)r^{n-1}\,\mathrm{d}\widetilde{\sigma}\,\mathrm{d}r = nv_n\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\theta)r^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}r$$

car $\widetilde{\sigma}(\mathbb{S}^{n-1}) = n|\cup_{t\in[0,1]} t\,\mathbb{S}^{n-1}| = nv_n$.

En considérant la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x|^2}$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\theta)r^{n-1}\,\mathrm{d}\widetilde{\sigma}\,\mathrm{d}r &= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|r\theta|^2}r^{n-1}\,\mathrm{d}\widetilde{\sigma}\,\mathrm{d}r \\
(\theta\in\mathbb{S}^{n-1}) &= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r^{n-1}\,\mathrm{d}\widetilde{\sigma}\,\mathrm{d}r \\
&= nv_n\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r^{n-1}\,\mathrm{d}r \\
(r=\sqrt{2t}) &= nv_n\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(\sqrt{2t})^{n-1}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t}} \\
&= nv_n 2^{\frac{n}{2}-1}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{\frac{n}{2}-1}\,\mathrm{d}t \\
&= nv_n 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{n}{2}}.$$

Ainsi,

$$v_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Finalement, le volume de la boule $\mathcal{B}_2^n$ est $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

E.3 Volume de la boule $\mathcal{B}_\infty^n$

Par définition, $\mathcal{B}_\infty^n = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \max_{i\in 1,\dots,n} |x_i| \leq 1\} = [-1,1]^n$. Par conséquent,

$$|\mathcal{B}_\infty^n| = |[-1,1]^n| = |[-1,1]|_1^n = 2^n.$$

Finalement, le volume de la boule $\mathcal{B}_\infty^n$ est 2^n.

E.4 Volume des boules $\mathcal{B}_p^n$

On calcule

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|_{\ell_p^n}^p}\,\mathrm{d}x$$

de deux manières différentes. D'une part,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|_{\ell_p^n}^p}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n |x_i|^p}\,\mathrm{d}x \\
&= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x_i|^p}\,\mathrm{d}x_i \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|t|^p}\,\mathrm{d}t\right)^n \\
&= \left(2\int_0^{+\infty} \left(\int_{t^p}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t\right)^n \\
&= \left(2\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{s^{\frac{1}{p}}} \mathrm{d}t\right) \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s\right)^n \\
&= \left(2\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{p}}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s\right)^n \\
&= \left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|_{\ell_p^n}^p}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\|x\|_{\ell_p^n}^p}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\int_{\{\|x\|_{\ell_p^n}^p \leq t\}} \mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}|t^{\frac{1}{p}}\mathcal{B}_p^n|\,\mathrm{d}t = |\mathcal{B}_p^n| \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{\frac{n}{p}}\,\mathrm{d}t = |\mathcal{B}_p^n|\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$|\mathcal{B}_p^n| = \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}.$$

Bibliographie

[ART] E. Artin, *Einführung in die theorie der Gammafunktion*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Verlag, Leipzig, 1931

[BAL] K. Ball, *Flavor of geometry*, an elementary introduction to modern convex geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[BOB-NAZ1] S.G. Bobkov et F.L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2003

[BOB-NAZ2] S.G. Bobkov, F.L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic inequalities and applications, 3-13, Progr. Probab., 56, Birkhäuser, Basel, 2003

[BOR1] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Math. 12, 239-252, 1974

[BOR2] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Periodica Mathematica Hungarica Vol. 6, 111-136, 1975

[BOR3] C. Borell, *Complement of Lyapounov inequalities*, Math. Ann. 205, 323-331, 1973

[BRE] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, Paris, 1999

[BRI] M. Brian, G. Pages, *Théorie de l'intégration*, Vuibert, Paris, 2009

[DEM] F. Demengel, G. Demengel, *Convexité dans les espaces fonctionnels*, Ellipses, Paris, 2004

[FOA] D. Foata, A. Fuchs, *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris, 2003

[GAR] R.J. Gardner, *Geometric tomography*, encyclopedia of mathematics ans its applications 58, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[GIA] A. Giannopoulos, *Notes on isotropic convex bodies*, Warsaw, 2003

[HEN] D. Hensley, *Slicing convex bodies - bounds for slice area in terms of the body's covariance*, Proc. Am. Math. Soc. 79(4), 619-625, 1980

[KAR] S. Karlin, F. Proschan, R.E. Barlow, *Moment inequalities of Pòlya frequency functions*, Pacific J. Math., 11, 1023-1033, 1961

[KUF] A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977

[LAT] R. Latała, *On the equivalence between geometric and arithmetic means for log-concave measures*, Convex geometric analysis (Berkeley, CA, 1996), 123-127, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999

[LEI] K. Leichtweiss, *Affine geometry of convex bodies*, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg, 1998

[LOO] L.H. Loomis, H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc 55, 961-962, 1949

[MEY] M. Meyer, *Une caractérisation volumique de certains espaces normés de dimension finie*, Israël Journal of Mathematics Vol. 55, No. 3., 1986

[MIL-PAJ] V.D. Milman, A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. 1376, 64-104, Springer, Berlin, 1989

[MIL-SCH] V.D. Milman, G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Math., 1200, Springer, Berlin, 1986

[SCH] R. Schneider, *Convex bodies : the Brunn-Minkowski theory*, encyclopedia of mathematics ans its applications 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993

Index